ملحقة المدرسة العليا للأساتذة

- مثلة -

مسار أستاذ التعليم المتوسط رياضيات

التمرين 1: 6,75

$\vec{\delta} = e^t \vec{i} + \cos wt \vec{j} + t^2 \vec{k}$

1- إيجاد تسارع السرعة:

$\frac{dV_x}{dt} = \delta_x = e^t \Rightarrow V_x = \int e^t dt = e^t + C_1$ (0,25)

عند $t=0$ لدينا: $V_x = 1$ أي

$V(0) = e^0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$ $\boxed{V_x = e^t}$ (0,5)

$\frac{dV_y}{dt} = \cos wt \Rightarrow V_y = \int \cos wt \, dt$ (0,25)

$V_y = \frac{1}{w} \sin wt + C_2$

عند $t=0$ لدينا: $V_y = 0$ أي:

$V(0) = \frac{1}{w} \sin 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\boxed{V_y = \frac{1}{w} \sin wt}$ (0,5)

$\frac{dV_z}{dt} = t^2 \Rightarrow V_z = \int t^2 dt$ (0,25)

$V_z = \frac{1}{3} t^3 + C_3$

عند $t=0$ لدينا $V_z = -1$ أي (0,5)

$C_3 = -1 \Rightarrow \boxed{V_z = \frac{1}{3} t^3 - 1}$

إذن: $\vec{V} = e^t \vec{i} + \frac{1}{w} \sin wt \vec{j} + \left(\frac{1}{3} t^3 - 1\right) \vec{k}$ (0,5) (2,75)

- إيجاد تسارع الموضع:

$\frac{dx}{dt} = V_x \Rightarrow x = \int V_x dt = \int e^t dt$ (0,25)

$x = e^t + C_1$

لما $t=0$ لدينا: $x = 1$ إذن:

$C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = e^t}$ (0,5)

$\frac{dy}{dt} = V_y \Rightarrow y = \int V_y dt = \int \frac{1}{w} \sin wt \, dt$ (0,25)

$y = -\frac{1}{w^2} \cos wt + C_2$

عند $t=0$ لدينا $y = -\frac{1}{w^2}$ أي:

$C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{w^2} \cos wt}$ (0,5)

$\frac{d\delta}{dt} = V_\delta \Rightarrow \delta = \int V_\delta dt = \int \left(\frac{1}{3} t^3 - 1\right) dt$ (0,25)

$\delta = \left(\frac{1}{12} t^4 - t\right) + C_3$

عند $t=0$ لدينا $\delta = 0$

$C_3 = 0 \leftarrow \delta = 0$

$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{12} t^4 - t}$ (0,5)

إذن: $\overrightarrow{OM} = e^t \vec{i} + \frac{1}{w^2} \cos wt \vec{j} + \left(\frac{1}{12} t^4 - t\right) \vec{k}$ (0,5) (2,75)

2- كمية الحركة:

$\vec{P} = m\vec{V} = e^t \vec{i} + \frac{1}{w} \sin wt \vec{j} + \left(\frac{1}{3} t^3 - 1\right) \vec{k}$ (0,5)

3- التأكد من تحقق قانون نيوتن الثاني:

$\frac{d\vec{P}}{dt} \overset{?}{=} \vec{F}$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = e^t \vec{i} + \frac{1}{w^2} \cos wt \vec{j} + t^2 \vec{k}$ (0,5)

$= m\vec{\delta}$

إذن القانون محقق (0,25)

Scanné avec CamScanner

$\vec{O'M} = \left(-\frac{1}{2}gt^2+h\right)\vec{k'} - \frac{1}{2}at^2\vec{i}$ (0,5) (1)

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}at^2 & (0,5) \\ z' = -\frac{1}{2}gt^2+h \Rightarrow z' = -\frac{g}{a}x' + h & (0,5) \end{cases}$ (1)

مسار الكرية هو مستقيم (0,5)

التمرين 3 : 6 pts

$\vec{OM} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$

1. القوة تطبق: $\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (0,25)

$= -m\omega^2\vec{r}$ (0,25) (0,5)

تكون $\vec{F}$ مشتقة من كمون إذا كان:

$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ (0,25)

$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix}$ (0,25)

$= \left(\frac{-\partial m\omega^2 y}{\partial x} + \frac{\partial m\omega^2 x}{\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}$ (0,25)

إذن $\vec{F}$ مشتقة من كمون E_p :

$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p = -\vec{\nabla}E_p$ (0,25)

$\begin{cases} F_x = -m\omega^2 x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad ... (1) & (0,25) \\ F_y = -m\omega^2 y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad ... (2) \end{cases}$

من (1) نجد :

$-m\omega^2 x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \Rightarrow E_p = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + f(y)$ (0,25)

من (2) نجد :

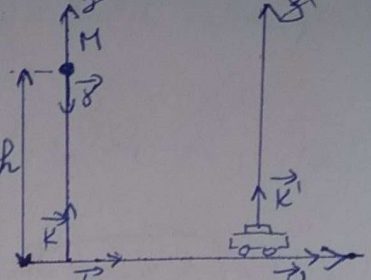
$-m\omega^2 y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(m\omega^2\frac{x^2}{2} + f(y)\right)$

$= -\frac{\partial f(y)}{\partial y}$

$f(y) = m\omega^2\frac{y^2}{2} + C$ (0,25) (2,5)

تكون E_p من الشكل:

$\Rightarrow E_p = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{m\omega^2}{2}r^2$ (0,25)



1. تعيين $\vec{O'M}$ في المعلم R' الذي مبدؤه مرتبط بمركز الكرية في المعلم R هو: $\vec{OM} = z\vec{k}$

$\vec{\gamma} = -g\vec{k} \Rightarrow \gamma_z = \frac{d^2z}{dt} = -g$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$

عند $t=0$ لدينا: $z_0 = h$ ، $v_0 = 0$

$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ (0,5)

$\vec{OM} = \left(-\frac{1}{2}gt^2+h\right)\vec{k}$

$\vec{O'M} = \vec{OM} - \vec{OO'}$ (0,5) تكون

لدينا R' في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لـ R $(\vec{u} = u\vec{i})$ أي: $\vec{OO'} = ut\vec{i}$ (0,5)

$(\vec{i} = \vec{i'}$ ، $\vec{k} = \vec{k'}$ لأن)

$\vec{O'M} = \left(-\frac{1}{2}gt^2+h\right)\vec{k'} - ut\vec{i}$ (2) (0,5)

2. معادلة مسار الكرية:

$\begin{cases} x' = -ut & (0,5) \\ z' = -\frac{1}{2}gt^2+h \Rightarrow z' = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x'}{u}\right)^2 + h & (0,5) \end{cases}$ (1)

وهي معادلة قطع مكافئ.

3. لما R' في حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لـ R:

$\vec{\gamma} = a\vec{i} \Rightarrow x_{O'} = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$

عند $t=0$ لدينا: $O \equiv O'$ أي:

$x_{O'} = 0$ ، $\dot{x}_{O'} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$

$\vec{OO'} = \frac{1}{2}at^2\vec{i}$ (0,5)

Scanné avec CamScanner

E تتعلق بالزمن أي أنها ثابتة وهذا نتيجة لأن $\vec{F}$ مشتقة من كمون (1) (0,25)

الأسئلة الظرفية: 02

1. في حالة جملة مكونة من n نقطة مادية العلاقة $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i = \vec{0}$ صحيحة دوما مهما كان المعلم الذي حسبت فيه ص (0,5)

2. اختيار العزم الزاوي يتعلق بعزوم القوى الخارجية والداخلية خ (0,5)
(بل يتعلق بعزوم القوى الخارجية فقط)

3. عزم القوى الداخلية لا يكون معدوم خ (0,5)
(بل عزم القوى الداخلية معدوم)

4. في حالة جملة مكونة من n نقطة مادية مركز عطالة الجملة هو مبدأ المعلم الذاتي ص (0,5)

2. عمل القوة $\vec{F}$ من $M_1(r_1)$ إلى $M_2(r_2)$ (0,25)

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.d\vec{r} = -m\omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \vec{r}.d\vec{r}$$

$$= m\omega^2 (r_1^2 - r_2^2)$$ (0,25)

3. حساب الطاقة الحركية بين الموضعين A و B:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$ (0,25)

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)$$ (0,25)

عند الموضع A: $(\omega t = 0)$.

$$\Rightarrow E_c(A) = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$$ (0,25)

عند الموضع B: $\omega t = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow E_c(B) = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$$ (0,25)

$$\Rightarrow \frac{E_c(A)}{E_c(B)} = \frac{b^2}{a^2}$$ (0,25) (1,25)

4. التغير في الطاقة الحركية:

$$E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$$ (0,25)

و العمل المنجز بين $A(r_1 = a)$ و $B(r_2 = b)$ هو:

$$W = \frac{1}{2}m(a^2 - b^2)$$ (0,25)

إذن: $E_c(B) - E_c(A) = W$ (0,25)

وهذا يحقق نظرية الطاقة الحركية (0,75)

5. الطاقة الميكانيكية:

$$E = E_c + E_p$$ (0,25)

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2(a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t)}_{E_p} +$$ (0,25)

$$\frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\sin^2\omega t)$$

Scanné avec CamScanner