

Examen final

Transfert de chaleur et de masse approfondi

Durée : 2 heures

Exercice n°1 (3 points)

Si la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} \right) x_A(z) = - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

Trouver l'équation différentielle que doit vérifier la fraction molaire $x_B(z)$ de l'espèce B dans le système binaire (A, B).

Exercice n°2 (3 points)

Donner les expressions des nombres de Biot Bi et de Fourier FO avec la définition de chaque terme et montrer qu'ils sont adimensionnels.

Exercice n°3 (7 points)

Le pouvoir émissif spectral d'un corps noir en fonction de la longueur d'onde λ et de la température absolue T est donné par la formule

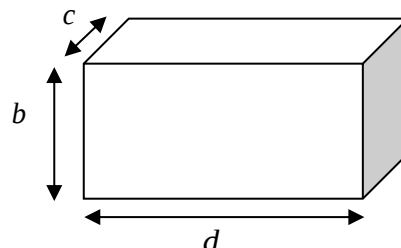
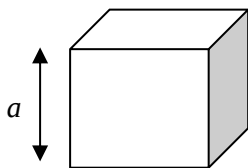
$$E_b(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)}$$

- a) Dédurre les expressions $E_{b1}(\lambda, T)$ pour $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$ et $E_{b2}(\lambda, T)$ pour $\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1$.
- b) Trouver la valeur $\lambda_{\max}$ dans les deux cas.

Exercice n°4 (7 points)

Un cube de côté a et un parallélépipède de côtés b , c et d sont constitués d'un même matériau de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ , de capacité calorifique C_p et sont portés à la même température T_0 ensuite plongés simultanément dans un bain liquide de température T_∞ . Si le coefficient d'échange entre le liquide dans le bain et les deux corps est h ,

- a) Calculer les longueurs caractéristiques du cube L_{CC} et du parallélépipède L_{CP} ,
- b) Dédurre une relation entre les temps que prendront, respectivement le cube et le parallélépipède t_C et t_P , pour atteindre la même température finale en fonction de a , b , c et d .
- c)



Corrigé type de l'examen final

Transfert de chaleur et de masse approfondi

Durée : 2 heures

Exercice n°1 (3 points)

Comme la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} \right) x_A(z) = - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

et sachant que

$$x_A(z) = 1 - x_B(z) \quad \boxed{1.0}$$

nous obtenons

$$-\frac{dx_B(z)}{dz} - \frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} + \left(\frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} \right) x_B(z) = - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \quad \boxed{0.5}$$

$$-\frac{dx_B(z)}{dz} - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}} - \frac{N_{Bz}}{cD_{AB}} + \left(\frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} \right) x_B(z) = - \frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \quad \boxed{0.5}$$

soit

$$\frac{dx_B(z)}{dz} - \left(\frac{N_{Az} + N_{Bz}}{cD_{AB}} \right) x_B(z) = - \frac{N_{Bz}}{cD_{AB}} \quad \boxed{1.0}$$

Exercice n°2 (3 points)

Les nombres de Biot Bi et de Fourier Fo sont

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} \quad \boxed{0.5}$$

$$Fo = \frac{at}{L_c^2} \quad \boxed{0.5}$$

et ils sont adimensionnels, car

$$[Bi] = \frac{Wm^{-2}C^{-1}m}{Wm^{-1}C^{-1}} = 1 \quad \boxed{1.0}$$

$$[Fo] = \frac{m^2s^{-1}s}{m^2} = 1 \quad \boxed{1.0}$$

Exercice n°3 (7 points)

a) Pour $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$, nous avons

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \dots \quad \boxed{1.0}$$

d'où

$$E_{b1}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1\right)}$$

soit

$$E_{b1}(\lambda, T) = \frac{2\pi kcT}{\lambda^4} \quad \boxed{1.0}$$

Pour $\frac{hc}{\lambda kT} \gg 1$, nous avons

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \gg 1 \quad \boxed{1.0}$$

soit

$$E_{b2}(\lambda, T) = 2\pi hc^2 \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \quad \boxed{1.0}$$

b) La fonction $E_{b1}(\lambda, T)$ n'admet pas d'extremum. $\boxed{0.5}$

Pour trouver $\lambda_{\max}$ pour $E_{b2}(\lambda, T)$, nous devons calculer $\frac{dE_{b2}(\lambda, T)}{d\lambda} = 0$ $\boxed{0.5}$

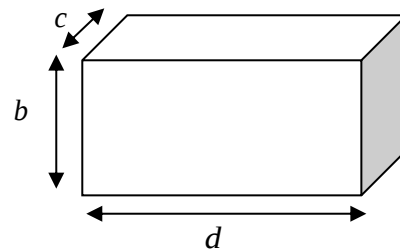
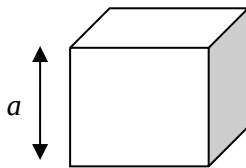
$$\frac{dE_{b2}(\lambda, T)}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \left[-5\lambda^{-6} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} + \lambda^{-5} \left(\frac{hc}{\lambda^2 kT} \right) e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \right] = 0 \quad \boxed{0.5}$$

$$-5\lambda^{-6} + \lambda^{-7} \left(\frac{hc}{kT} \right) = 0 \quad \boxed{0.5}$$

soit

$$\lambda_{\max} = 5 \frac{hc}{kT} \quad \boxed{1.0}$$

Exercice n°4 (7 points)



a) Les longueurs caractéristiques du cube L_{CC} et du parallélépipède L_{CP} sont :

$$L_{CC} = \frac{V_C}{S_C} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6} \quad \boxed{1.0}$$

$$L_{CP} = \frac{V_P}{S_P} = \frac{bcd}{2bd + 2bc + 2cd} \quad \boxed{1.0}$$

b) En appliquant la formule

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\frac{h}{\rho C_P L_C} t} \quad \boxed{0.5}$$

soit

$$\frac{T(t_C) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{h}{\rho C_P L_{CC}} t_C} \quad 0.5$$

$$\frac{T(t_P) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{h}{\rho C_P L_{CP}} t_P} \quad 0.5$$

Comme

$$T(t_C) = T(t_P) \quad 0.5$$

nous obtenons

$$\frac{h}{\rho C_P L_{CC}} t_C = \frac{h}{\rho C_P L_{CP}} t_P \quad 1.0$$

d'où

$$\frac{t_C}{L_{CC}} = \frac{t_P}{L_{CP}} \quad 1.0$$

soit, au final

$$\frac{t_C}{t_P} = \frac{L_{CC}}{L_{CP}} = \frac{\frac{a}{6}}{\frac{bcd}{2bd + 2bc + 2cd}} = \frac{a(bd + bc + cd)}{3bcd} \quad 1.0$$