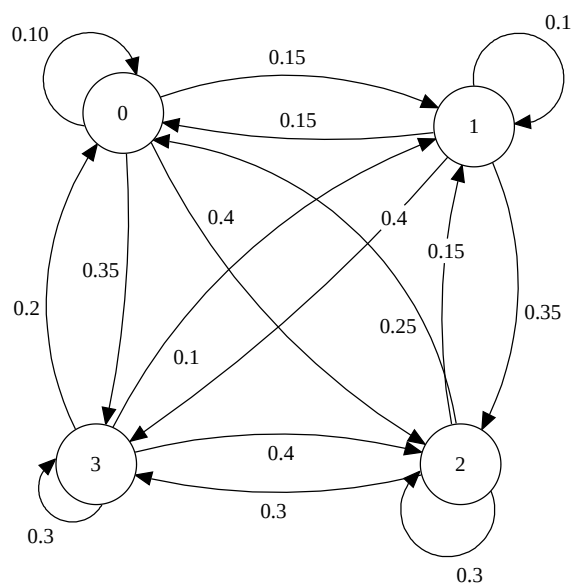


Exercice 01 (04 pts)

$$P = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.15 & 0.40 & 0.35 \\ 0.15 & 0.10 & 0.35 & 0.40 \\ 0.25 & 0.15 & 0.30 & 0.30 \\ 0.20 & 0.10 & 0.40 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Matrice de transition :

Graphe :



2.

$$P_{C,G}^2 = P(X_2 = G | X_0 = C) = P(X_2 = 3 | X_0 = 2) = 0.3 * 0.3 + 0.3 * 0.3 + 0.15 * 0.4 + 0.25 * 0.35 = 0.3275$$

3. Une chaîne de Markov est stationnaire ssi :

- L'espace d'état est fini
- Irréductible, i.e., tous ses états communiquent : $\forall x, y \in E: x \leftrightarrow y$
- Apériodique $\forall x \in E, d(x) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid p_{x,x}^n > 0\} = 1$

On constate que les conditions sont vérifiées, donc la chaîne est stationnaire.

4. La distribution stationnaire unique de cette chaîne de Markov est : $\pi = (0.1923 \ 0.1275 \ 0.3578 \ 0.3224)$

On constate que les bases C et G sont présentes en proportions significativement plus élevées ($\pi(C)=0.3578$ et $\pi(G)=0.3224$) que les bases A et T ($\pi(A)=0.1923$ $\pi(C)=0.1275$), ce qui indique qu'il s'agit d'une région promoteurs.

Exercice 02 (06 pts)

1. Déterminer le type du système

Le système correspond à un modèle de **file d'attente M/M/8/8**,

2. Déterminer le taux d'arrivée des appels (λ), et le taux de service (μ) si on choisit l'heure comme unité du temps

Taux d'arrivée des appels (λ) :

$$\lambda = \frac{6 \text{ appels}}{15 \text{ minutes}} \times 60 \text{ minutes} = 24 \text{ appels par heure}$$

Taux de service (μ) :

La durée des appels suit une distribution exponentielle avec une durée moyenne de 12 minutes. :

$$\mu = \frac{60}{12} = 5 \text{ appels par heure}$$

3. Calculer le taux d'utilisation des serveurs (antenne)

Calcul du taux d'arrivée effectif :

$$\alpha = \frac{\lambda_e}{s \cdot \mu} = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} \cdot (1 - P_K) = \frac{24}{8 \cdot 5} \cdot (1 - 0.0609) = 0.563$$

Le **taux d'utilisation des serveurs** est **56.3 %**

4 Calculer la probabilité qu'un appel soit rejeté :

La capacité du système égale à $K=8$, donc : $P_{\text{rejet}} = P(n = 8) = 0.0609$ (probabilités données dans le tableau)

5. Calculer le nombre moyen d'appels gérés par l'antenne

Le nombre moyen d'appels gérés par l'antenne :

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^K n P_n = \sum_{n=0}^8 n P_n = 4.508 \text{ (Probabilités données dans le tableau)}$$

6. Si on augmente le nombre de canaux de l'antenne à 10 :

Type du système : *M/M/10/10*

$$P_K = P_0 \frac{\rho^K}{s^K - s!} = 0.00831 \frac{4.8^{10}}{10^0 10!} = 0.00831 \frac{6\,492\,506,21}{3\,628\,800} = 0.0149$$

Le taux de rejet = $0.0149 \times 100 = 1.49\%$

Exercice 03 (10 pts)

1.

Formule du générateur congruente linéaire :

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m$$

$$x_n = (5x_{n-1} + 7) \bmod 32$$

$$x_1 = (35 \times 7 + 14) \bmod 101 = 57$$

$$x_2 = (35 \times 57 + 35) \bmod 97 = 90$$

$$x_3 = (35 \times 90 + 35) \bmod 97 = 33$$

n	x_n	$u_n = \frac{x_n}{m} = \frac{x_n}{101}$
0	57	0.564
1	90	0.891
2	33	0.327

2.

$$F(X_{(k)}) = \frac{k-1}{n-1}$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_k	18	22	35	27	31	24	40	20	29	25
$X_{(k)}$	18	20	22	24	25	27	29	31	35	40
$F(X_{(k)})$	0	0,111	0,222	0,333	0,444	0,556	0,667	0,778	0,889	1

Algorithme de transformation inverse de la fonction de répartition empirique :

1. Générer un nombre aléatoire uniforme $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
2. Calculer $P = (n-1) \times U$ et $j = [P] + 1$; // $[P]$ est la partie entière de P .
3. Retourner $x = X_{(j)} + (P+1-j) \times (X_{(j+1)} - X_{(j)})$

n	U_n	P	j	$X_{(j)}$	$X_{(j+1)}$	x_n
1	0.91	8.19	9	35	40	35.95
2	0.01	0.09	1	18	20	18.18
3	0.54	4.86	5	25	27	26.72

Client	Durées inter-arrivées	Temps d'arrivées	Durées de service	Début de service	Temps de départ
1	7	7,00	58	7,00	65,00
2	62	69,00	52	69,00	121,00
3	65	134,00	50	134,00	184,00
4	32	166,00	85	184,00	269,00
5	14	180,00	45	269,00	314,00

Evènement	Temps	N_i	Q_i	Etat du serveur
Arrivee	7.0	1.0	0.0	Occupée
Depart	65.0	0.0	0.0	Libre
Arrivee	69.0	1.0	0.0	Occupée
Depart	121.0	0.0	0.0	Libre
Arrivee	134.0	1.0	0.0	Occupée
Arrivee	166.0	2.0	1.0	Occupée
Arrivee	180.0	3.0	2.0	Occupée
Depart	184.0	2.0	1.0	Occupée
Depart	269.0	1.0	0.0	Occupée
Depart	314.0	0.0	0.0	Libre

$$\bar{T} = \frac{\sum(\text{Temps de départs} - \text{Temps d'arrivées})}{\text{nombre de clients servis}}$$

$$\bar{T} = 79.4$$

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^n \frac{N_i(t_i - t_{i-1})}{t_n}$$

$$\bar{N} = 1.26$$

$$\text{Taux d'utilisation} = \sum_{N_k > 0} \frac{(t_k - t_{k-1})}{t_n} = 1 - \sum_{N_k = 0} \frac{(t_k - t_{k-1})}{t_n} =$$

$$\text{Taux d'utilisation} = \rho_{0,67}$$