

Exercice 01 (04 pts)

Les séquences ADN sont des chaînes composées de quatre types de bases nucléotidiques : Adénine (A), Thymine (T), Cytosine (C) et Guanine (G). **Exemple :**

A	C	C	G	C	T	G	A	...
---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Les données collectées d'une séquence ADN ont permis de construire les statistiques suivantes sur les transitions entre nucléotides (A,T,C,G) :

De / Vers	A	T	C	G
A	10%	15%	40%	35%
T	15%	10%	35%	40%
C	25%	15%	30%	30%
G	20%	10%	40%	30%

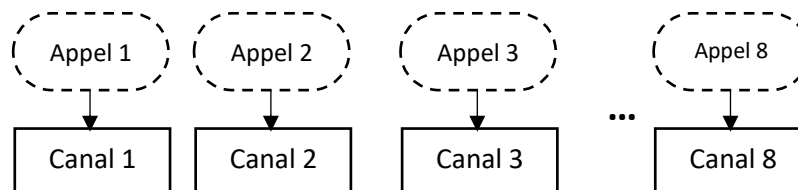
- Donnez l'espace d'états et la matrice de transition P de cette chaîne de Markov, et tracer le graphe correspondant.
- Calculer la probabilité de transition de l'état C à l'état G en 2 étapes.
- Cette chaîne est-elle stationnaire (possède une distribution stationnaire unique)? Justifier votre réponse.
- Le calcul par ordinateur de la puissance P^{30} de la matrice de transition P a donné le résultat suivant :

$$P^{30} = \begin{pmatrix} 0.1923 & 0.1275 & 0.3578 & 0.3224 \\ 0.1923 & 0.1275 & 0.3578 & 0.3224 \\ 0.1923 & 0.1275 & 0.3578 & 0.3224 \\ 0.1923 & 0.1274 & 0.3578 & 0.3224 \end{pmatrix}$$

- Déduire la distribution stationnaire de cette chaîne.
- Déterminer la région de cette séquence ADN, sachant que les séquences peuvent correspondre à une région : **Promoteur** (plus riche en bases C et G), **Intron** (plus riche en bases A et T), ou **Exon** (équilibrée en bases).

Exercice 02 (06 pts)

Un opérateur de téléphonie mobile prévoit de déployer une nouvelle antenne dans une zone.



Sachant que :

- Les appels qui arrivent à l'antenne suivent un processus de Poisson avec un taux moyen de 6 appels toutes les 15 minutes.
- La durée des appels suit une distribution exponentielle, avec une durée moyenne de 12 minutes.
- L'antenne dispose de 8 canaux qui permettent de gérer jusqu'à 8 appels simultanément.
- Si les 8 canaux sont occupés, les appels supplémentaires sont rejetés (les appels ne sont pas mis en attente).
- Les probabilités des différents nombres d'appels gérés simultanément par l'antenne sont données dans le tableau ci-dessous :

$P(n=0)$	$P(n=1)$	$P(n=2)$	$P(n=3)$	$P(n=4)$	$P(n=5)$	$P(n=6)$	$P(n=7)$	$P(n=8)$
0.00872	0.0418	0.1004	0.1607	0.1928	0.1851	0.1481	0.1015	0.0609

Questions :

1. Déterminer le type du système
2. Déterminer le taux d'arrivée des appels (λ), et le taux de service (μ) si on choisit l'heure comme unité du temps.
3. Calculer le taux d'utilisation des serveurs (canaux)
4. Déterminer la probabilité qu'un appel soit rejeté
5. Calculer le nombre moyen d'appels gérés par l'antenne
6. Pour réduire le taux de rejet des appels, l'opérateur envisage d'augmenter le nombre de canaux de l'antenne à 10. Déterminer le type du système, et calculer le taux de rejet des appels sachant que la probabilité $P(n = 0) = 0.00831$.

Exercice 03 (10 pts)

1. Considérons un générateur congruentiel (GCL) linéaire avec comme paramètres :
 - Le multiplicateur $a = 35$
 - Le module $m = 101$
 - L'incrément $c = 14$
 - La semence $x_0 = 7$

Appliquer ce GCL pour générer 3 nombres pseudo-aléatoires dans l'intervalle $[0,1]$, distribués suivant une loi uniforme $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

2. Considérons les durées de services observées dans un centre d'appel, indiquées dans le tableau ci-dessous.

Numéro d'observation (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Durées de service (X_k)	18	22	35	27	31	24	40	20	29	25

- 2.1. Déterminer dans un tableau la fonction de répartition empirique $F(X)$ des durées de services X_k .
- 2.2. Donner l'algorithme pour générer des durées de services par transformation inverse de la fonction de répartition empirique.
- 2.3. Utilisez cet algorithme pour générer 3 valeurs de temps de service, en utilisant les nombres pseudo-aléatoires suivants : $u_0 = 0.91, u_1 = 0.01, u_2 = 0.54$.
3. Considérons le tableau suivant contenant les durées inter-arrivées et les durées de services générées pour simuler une file d'attente avec un seul serveur.
 - 3.1. Utiliser les données du tableau pour une simulation manuelle de la file d'attente. (La simulation s'arrête lorsque tous les clients sont servis).
 - 3.2. Calculer les mesures suivantes :
 - Le temps moyen de séjour d'un client dans le système ($\bar{T}$),
 - Le nombre moyen de clients dans le système ($\bar{N}$),
 - Le taux d'utilisation du serveur ρ .

Client	Durées inter-arrivées	Durées de service
1	7	58
2	62	52
3	65	50
4	32	85
5	14	45

Nom : Prénom :

Client	Durées inter-arrivées	Temps d'arrivées	Durées de service	Début de service	Temps de départ
1					
2					
3					
4					
5					

Evènement	Temps	N_i	Q_i	Etat du serveur

Annexe

	M/M/S/K	M/M/S
P_0 : Probabilité que le système est vide (Aucun client dans le système)	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=S}^K \frac{\lambda^n}{S^{n-S} S! \mu^n} \right)^{-1}$	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^S}{S!} \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho}{S}\right)} \right) \right)^{-1}$
P_w : Probabilité d'attente	$P_w = P_0 \frac{\rho^S}{S!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{S}\right)^{K-S}}{1 - \frac{\rho}{S}}$	$P_w = C(S, \rho) = P_0 \times \frac{\rho^S}{(S-1)! (S-\rho)}$
Probabilité de rejet d'un client	$P_K = \frac{\rho^K}{S^{K-S} S!} P_0$	0
$\bar{N}$: Nombre moyen de clients dans le système	$\bar{N} = \sum_{n=0}^K n P_n$	$\bar{N} = \rho \left(1 + \frac{C(S, \rho)}{S - \rho} \right)$