

Exercice 01 (04 pts)

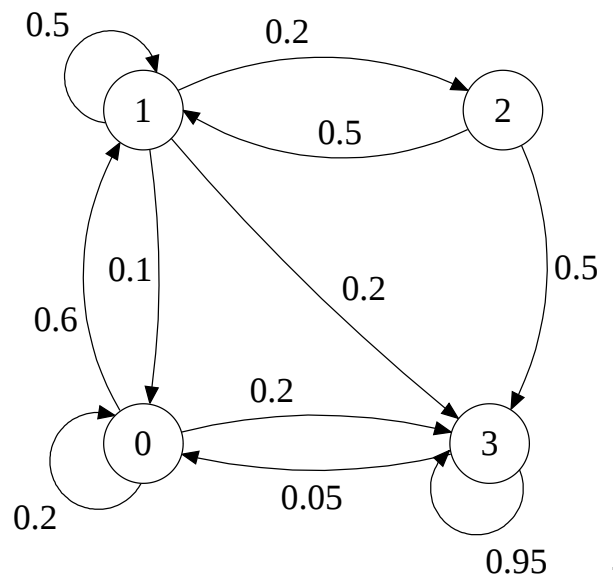
La chaîne de Markov qui modélise l'évolution de la classification d'un client dans le temps :

$(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à espace d'états est $E = \{0,1,2,3\}$ (0 : Accueil, 1 : Produits, 2 : Acheter, 3 : quitter).

Matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.05 & 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Graphe :



2. La probabilité qu'un client achète un produit dans 3 minutes :

$$P_{0,2}^3 = P(X_3 = 2 | X_0 = 0) = 0.2 * 0.6 * 0.2 + 0.6 * 0.5 * 0.2 = 0.084$$

3. Une chaîne de Markov est stationnaire ssi :

- L'espace d'état est fini
- Irréductible, i.e., tous ses états communiquent : $\forall x, y \in E : x \leftrightarrow y$
- Apériodique $\forall x \in E, d(x) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid p_{x,x}^n > 0\} = 1$

On constate que les conditions sont vérifiées, donc la chaîne est stationnaire.

L'état « 0 » est apériodique, donc la chaîne est apériodique.

La chaîne de Markov est stationnaire, et sa Matrice P^m converge vers la matrice dont toutes les lignes sont des constantes égales à π (La distribution stationnaire unique) (Théorème ergodique). Donc, la distribution stationnaire unique de cette chaîne de Markov est : $\pi = (0.0632 \ 0.0949 \ 0.0189 \ 0.8227)$

4. Le nombre moyen de visiteurs qui achètent des produits $0.0189 \times 10000 \approx 189$

Exercice 02 (06 pts)

Le système est une file d'attente M/M/S

Le taux d'arrivée des appels par heure : $\lambda = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

Le taux de service par heure : $\mu = \frac{60}{5} = 12$

Condition de stationnarité : $a = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$

$$a = \frac{40}{12 \times S} < 1 \Rightarrow S > \frac{40}{12}$$

Le nombre minimal de serveur $S = 4$

	M/M/4
P_0 : Probabilité que le système est vide (Aucun appareil dans l'atelier)	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^S}{S!} \frac{1}{1 - (\frac{\rho}{S})} \right) \right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^3 \frac{3.33^n}{n!} + \left(\frac{3.33^4}{4!} \frac{1}{1 - (0.83)} \right) \right)^{-1} \approx 0.0213$
P_w : Probabilité qu'un appel reste en attente avant qu'un agent lui réponde	$P_w = C(S, \rho) = P_0 \times \frac{\rho^S}{(S-1)!(S-\rho)} = 0.0213 \times \frac{3.33^4}{(4-1)!(4-3.33)} \approx 0.658$
$\bar{N}$: Le nombre moyen de clients dans le système	$\bar{N} = \rho \left(1 + \frac{C(S, \rho)}{S - \rho} \right) = 3.33 \left(1 + \frac{0.658}{4 - 3.33} \right) \approx 6,623$
$\bar{N}_Q$: Nombres moyens de clients en attente	$\bar{N}_Q = \bar{N} - \bar{N}_s = 6,623 - 3.333 = 3.29$
$\bar{T}_Q$: Temps moyen d'attente dans la file	$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda} = \bar{T} - \bar{T}_s \approx 0,166 - \frac{5}{60} \approx 0.083 \text{ heure} \approx 5 \text{ minutes}$

Système à plusieurs serveurs (S=4), et à capacité limitée (K=10) : M/M/4/10

	M/M/4/10
Probabilité de rejet d'un client	$P_{10} = 0.045$
$\bar{N}$: Le nombre moyen de clients dans le système	$\bar{N} = \sum_{n=0}^K n P_n = 0 * 0.0261 + 1 * 0.087 + 2 * 0.145 + 3 * 0.161 + 4 * 0.134 + 5 * 0.112 + 6 * 0.0932 + 7 * 0.0777 + 8 * 0.0648 + 9 * 0.054 + 10 * 0.045 = 4.5135$
$\bar{N}_Q$: Nombres moyens de clients en attente	$\bar{N}_Q = \bar{N} - \bar{N}_s = \bar{N} - \frac{\lambda}{\mu} (1 - P_k) = 4.5135 - \frac{40}{12} (1 - 0.045) = 1.33$
$\bar{T}_Q$: Temps moyen de séjour d'un client	$\bar{T}_Q = \frac{\bar{N}_Q}{\lambda(1 - P_{10})} \approx \frac{1.33}{40(1 - 0.045)} = \frac{4.5135}{40 \times 0.955} \approx 0.035 \text{ heure} \approx 2.1 \text{ min}$
Nombre moyen de clients rejetés sur 12 heures	$P_{10} \times \lambda \times 12 = P_{10} \times 40 \times 12 = 21.6$

Exercice 03 (10 pts)

1.1. Le GCL est à période complete

- Formule du générateur congruente linéaire

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m$$

$$x_n = (5x_{n-1} + 7) \bmod 32$$

$$x_1 = (5 \times 10 + 7) \bmod 32 = 25$$

$$x_2 = (5 \times 25 + 7) \bmod 32 = 4$$

$$x_3 = (5 \times 4 + 7) \bmod 32 = 27$$

n	x_n	$u_n = \frac{x_n}{m} = \frac{x_n}{32}$
0	25	0,781
1	4	0.125
2	27	0.843

1.2.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_k	158	61	52	38	149	50	207	40	90	26
$X_{(k)}$	26	38	40	50	50	52	61	90	158	207
$F(X_{(k)})$	0	0,111	0,222	0,333	0,444	0,556	0,667	0,778	0,889	1

Algorithme de transformation inverse de la fonction de répartition empirique :

1. Générer un nombre aléatoire uniforme $U \sim \mathcal{U}(0,1)$.
2. Calculer $P = (n - 1) \times U$ et $j = [P] + 1$; $[P]$ est la partie entière de P .
3. Retourner $x = X_{(j)} + (P + 1 - j) \times (X_{(j+1)} - X_{(j)})$

n	U_n	P	j	$X_{(j)}$	$X_{(j+1)}$	x_n
1	0,781	7,029	7	61	90	61,841
2	0.125	1,125	1	26	38	27,5
3	0.843	7,587	7	61	90	78,023

Client	Durées inter-arrivées	Temps d'arrivées	Durées de service	Début de service	Temps de départ
1	121	121	56	121	177
2	13	134	51	177	228
3	137	271	73	271	344
4	36	307	65	344	409
5	7	314	84	409	493

Evènement	Temps	N_i	Q_i	Etat du serveur
Arrivee	121	1	0	Occupé
Arrivee	134	2	1	Occupé
Depart	177	1	0	Occupé
Depart	228	0	0	Libre
Arrivee	271	1	0	Occupé
Arrivee	307	2	1	Occupé
Arrivee	314	3	2	Occupé
Depart	344	2	1	Occupé
Depart	409	1	0	Occupé
Depart	493	0	0	Libre

$$\bar{T} = \frac{\sum(\text{Temps de départs} - \text{Temps d'arrivées})}{\text{nombre de clients servis}}$$

$$= \frac{(177 - 121) + (228 - 134) + (344 - 271) + (409 - 307) + (493 - 314)}{5}$$

$$\bar{T} = 100,80$$

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^n \frac{N_i(t_i - t_{i-1})}{t_n}$$

$$= \frac{0*(121-0)+1*(134-121)+0*(271-228)+1*(307-271)+2*(314-307)}{493}$$

$$\bar{N} = \frac{504}{493} = 1,02$$

$$\rho = \sum_{N_k > 0} \frac{(t_k - t_{k-1})}{t_n} = 1 - \sum_{N_k = 0} \frac{(t_k - t_{k-1})}{t_n} = 1 - \frac{(228 - 121) + (493 - 271)}{493}$$

$$\rho = 0,667$$