

Exercice 01 (04 pts)

Considérons qu'un site Web de commerce électronique est organisé en deux principales rubriques : Accueil et Produits. Un visiteur du site peut visiter les rubriques accueil et produits, faire des achats, ou quitter le site. Nous collectons des données sur le comportement des visiteurs du site minute par minute. Les données collectées ont montré que :

- Parmi les visiteurs de la rubrique Accueil : 20 % restent sur cette rubrique après un minute, 60% passent à la rubrique Produits, 20% quittent le site.
 - Parmi les visiteurs de la rubrique Produits : 10 % retournent sur la rubrique Accueil après une minute, 50% restent sur la rubrique Produits, 20% réalisent des achats, et 20% quittent le site.
 - Parmi les visiteurs qui achètent des produits : 50 % retournent sur la rubrique Produits après une minute, et 50% quittent le site.
 - Parmi les visiteurs qui quittent le site, 5 % retourne sur la rubrique Accueil après un minute,
1. Donnez l'espace d'états et la matrice de transition P de cette chaine de Markov, et tracer le graphe correspondant.
 2. Cette chaine est-t-elle stationnaire (possède une distribution stationnaire unique)? Justifier votre réponse.
 3. Le calcul par ordinateur de la puissance P^{30} de la matrice de transition P a donné le résultat suivant :

$$P^{30} = \begin{pmatrix} 0.0632 & 0.0949 & 0.0189 & 0.8227 \\ 0.0632 & 0.0949 & 0.0189 & 0.8227 \\ 0.0632 & 0.0949 & 0.0189 & 0.8227 \\ 0.0632 & 0.0949 & 0.0189 & 0.8227 \end{pmatrix}$$

- Dédurre la distribution stationnaire de cette chaine.
- Calculer la moyenne du nombre de visiteurs qui effectuent des achats parmi 10 000 visiteurs sur le site.

Exercice 02 (06 pts)

1. Considérons un centre d'appels où les clients appellent pour obtenir de l'assistance. Le centre d'appel reçoit 2 appels chaque 3 minutes à la moyenne, et le temps moyen nécessaire pour qu'un agent réponde à un appel est de 5 minutes par appel.
 - 1.1. Dédurre les taux d'arrivée (λ) et de service (μ).
 - 1.2. Le centre d'appel souhaite recruter le nombre minimal d'agents nécessaires pour la stationnarité du système. Déterminer ce nombre
 - 1.3. Calculer les mesures de performances :
 - La probabilité que le système soit vide (P_0), et la probabilité d'attente d'un client (P_w)
 - Le nombre moyen de clients dans le système ($\bar{N}$), et le nombre moyen de clients en attente ($\bar{N}_Q$),
 - Le temps moyen d'attente d'un client avant d'être pris en charge par un agent ($\bar{T}_Q$).
2. On s'intéresse aux performances du même système si on limite le nombre d'appel à 10, autrement dit, s'il y'a déjà 10 appels en attente et en cours, les nouveaux appels seront rejetés.
 - 2.1. En se basant sur les probabilités stationnaires données dans le tableau, calculer les mesures de performances :
 - Le nombre moyen de clients dans le système ($\bar{N}$), et le nombre moyen de clients en attente ($\bar{N}_Q$)
 - Le temps moyen d'attente d'un client avant d'être pris en charge par un agent ($\bar{T}_Q$).
 - 2.2. Dédurre le nombre moyen d'appels rejetés durant une journée de travail de 12 heures.

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
0.0261	0.087	0.145	0.161	0.134	0.112	0.0932	0.0777	0.0648	0.054	0.045

Exercice 03 (10 pts)

1. Considérons un générateur congruentiel (GCL) linéaire avec comme paramètres :

- Le multiplicateur $a = 5$
- Le module $m = 32$
- L'incrément $c = 7$
- La semence $x_0 = 10$

Appliquer ce GCL pour générer 3 nombres pseudo-aléatoires dans l'intervalle $[0,1]$, distribués suivant une loi uniforme $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

2. Considérons les durées de services observées dans un centre d'appel, indiquées dans le tableau ci-dessous.

Numéro d'observation (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Durées de service $\{X_k\}$	158	61	52	38	149	50	207	40	90	26

- 2.1. Donner la fonction de répartition empirique $F(X)$ des durées de services en se basant sur les données du tableau.
 - 2.2. Donner l'algorithme pour générer des durées de services par transformation inverse de la fonction de répartition empirique.
 - 2.3. Appliquer la transformation inverse de la fonction de répartition empirique pour générer 3 durées de en utilisant les nombres pseudo-aléatoires de la question 1.
3. Considérons le tableau suivant contenant les durées inter-arrivées et les durées de services générées pour simuler une file d'attente avec un seul serveur.
- 3.1. Utiliser les données du tableau pour une simulation manuelle de la file d'attente. (La simulation s'arrête lorsque tous les clients sont servis).
 - 3.2. Calculer les mesures suivantes :
 - Le temps moyen de séjour d'un client dans le système ($\bar{T}$),
 - Le nombre moyen de clients dans le système ($\bar{N}$),
 - Le taux d'utilisation du serveur ρ .

Client	Durées inter-arrivées	Durées de service
1	121	56
2	13	51
3	137	73
4	36	65
5	7	84

Nom : Prénom :

Client	Durées inter-arrivées	Temps d'arrivées	Durées de service	Début de service	Temps de départ
1					
2					
3					
4					
5					

Evènement	Temps	N_i	Q_i	Etat du serveur

Annexe

	M/M/S/K	M/M/S
P_0 : Probabilité que le système est vide (Aucun client dans le système)	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=S}^K \frac{\lambda^n}{S^{n-S} S! \mu^n} \right)^{-1}$	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^S}{S!} \frac{1}{1 - (\frac{\rho}{S})} \right) \right)^{-1}$
P_w : Probabilité d'attente	$P_w = P_0 \frac{\rho^S}{S!} \frac{1 - (\frac{\rho}{S})^{K-S}}{1 - \frac{\rho}{S}}$	$P_w = C(S, \rho) = P_0 \times \frac{\rho^S}{(S-1)!(S-\rho)}$
Probabilité de rejet d'un client	$P_K = \frac{\rho^K}{S^{K-S} S!} P_0$	0
$\bar{N}$: Nombre moyen de clients dans le système		$\bar{N} = \rho \left(1 + \frac{C(S, \rho)}{S - \rho} \right)$