جامعة مسيلة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

ماستر 1 نقدي ومالي

2027 / 2026

التصحيح النموذجي لامتحان تحليل السلاسل الزمنية

التمرين 01:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \theta_4 \varepsilon_{t-4}$$

أ- المتوسط:

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) + \theta_3 E(\varepsilon_{t-3}) + \theta_4 E(\varepsilon_{t-4})$$

من تعريف الشوشرة البيضاء: $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-2}) = \dots = 0$

$$E(Y_t) = 0 + \theta_1 0 + \theta_2 0 + \theta_3 0 + \theta_4 \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{E(Y_t) = 0} \quad \text{0.1 pt}$$

ب- التباينات والتباينات المشتركة:

$$\gamma(0) = E(Y_t \cdot Y_t) = E\left[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \theta_4 \varepsilon_{t-4})(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \theta_4 \varepsilon_{t-4})\right]$$

$$= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2 + \theta_3^2 \sigma^2 + \theta_4^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2)\sigma^2$$

$$\boxed{\gamma(0) = \left(1 + \sum_{j=1}^{4} \theta_j^2\right)\sigma^2} \quad \text{0.1 pt}$$

$$\gamma(1) = E(Y_t \cdot Y_{t-1}) = E\left[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3} + \theta_4 \varepsilon_{t-4})(\varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3} + \theta_3 \varepsilon_{t-4} + \theta_4 \varepsilon_{t-5})\right]$$

$$\gamma(1) = \theta_1 \sigma^2 + \theta_1 \theta_2 \sigma^2 + \theta_2 \theta_3 \sigma^2 + \theta_3 \theta_4 \sigma^2 = (\theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_4)\sigma^2$$

$$\boxed{\gamma(1) = \left(\sum_{j=i+1}^{4} \theta_i \theta_j\right)\sigma^2} \quad \text{0.1 pt}$$

$$\gamma(2) = E(Y_t \cdot Y_{t-2}) = \boxed{(\theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_4)\sigma^2} \quad \text{0.1 pt}$$

$$\gamma(3) = E(Y_t \cdot Y_{t-3}) = \boxed{(\theta_3 + \theta_1 \theta_4)\sigma^2} \quad \text{0.1 pt}$$

$$\gamma(4) = E(Y_t \cdot Y_{t-4}) = \boxed{\theta_4 \cdot \sigma^2} \quad \text{0.1 pt}$$

2

ب- معادلات الارتباط الذاتي $\rho(k)$:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$ 0,25 pt

السيرورة من الشكل MA(4) وبالتالي نستخرج 5 معادلات:

- $\rho(0) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1$ 0,25 pt ,
$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_4}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2}$ 0,25 pt

- $\rho(2) = \frac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \frac{\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_4}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2}$ 0,25 pt ,
$\rho(3) = \frac{\theta_3 + \theta_1\theta_4}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2}$ 0,25 pt

- $\rho(4) = \frac{\theta_4}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2}$ 0,25 pt

ج/ الاستقرارية العكسية:

* نموذج MA(q) هي نماذج مستقرة بالتعريف. لذلك نتحقق من العكسية 0,5 pt

* العكسية:

$$Y_t = \varepsilon + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3} + \theta_4\varepsilon_{t-4}$$ 0,5 pt

$$Y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3 + \theta_4 L^4)\varepsilon_t$$

~~$1 + \sum \theta_j L^j$~~

$$= \left(1 + \sum \theta_j L^j\right)\varepsilon_t$$

حتى تكون النموذج قابل للعكس يجب أن تكون $|L| > 1$.

التمرين 02:

$$Y_t = a + bT + S_t + \varepsilon$$

1- لتقدير معالم النموذج باستخدام جدول Buys-Ballot

Année / Semestre	1	2	3	4	$\bar{Y}_i$
1	7	4	9	2	5,5
2	3	1	8	11	5,75
3	6	15	14	12	11,75
4	16	13	9	4	10,5
$\bar{Y}_i$	8	8,25	10	7,25	$\bar{\bar{Y}} = 8,375$
$i\bar{Y}_i$	8	16,5	30	29	$\sum i\bar{Y}_i = 83,5$

0,1 pt — 0,5 pt — 0,5 pt — 0,5 pt

(03)

$\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}T + \hat{S}_j$: الصيغة الجديدة

- $\hat{b} = 12\dfrac{\left[\sum i\bar{Y}_i - \dfrac{n(n+1)}{2}\bar{\bar{Y}}\right]}{m.n(n^2-1)}$ 0,5pt

$n = 4$ سنوات
$m = 4$ فصول

$\hat{b} = 12\dfrac{\left[83,5 - 10(8,375)\right]}{16\times 15} = -0,0125$ 0,5pt

- $\hat{a} = \bar{\bar{Y}} - \hat{b}\left[\left(\dfrac{m.n+1}{2}\right)\right]$ 0,5pt

$\hat{a} = 8,375 + 0,0125(8,5) = 8,48125$ 0,5pt

- $\hat{S}_j = \bar{Y}_j - \bar{\bar{Y}} - \hat{b}\left(j - \dfrac{m+1}{2}\right)$ 0,5pt

$$\begin{cases} S_1 = 5,5 - 8,375 + 0,0125\left(1 - \frac{4+1}{2}\right) = -2,89375 \\ S_2 = 5,75 - 8,375 + 0,0125\left(2 - \frac{4+1}{2}\right) = -2,63125 \\ S_3 = 11,75 - 8,375 + 0,0125\left(3 - \frac{4+1}{2}\right) = 3,38125 \\ S_4 = 10,5 - 8,375 + 0,0125\left(4 - \frac{4+1}{2}\right) = 2,14375 \end{cases}$$ 01pt

$\sum S_j = 0$

-2 الصيغة النهائية لـ $\hat{Y}_t$:

$$\hat{Y}_t = 8,48125 - 0,0125T + \begin{bmatrix} -2,89375 \\ -2,63125 \\ 3,38125 \\ 2,14375 \end{bmatrix}$$ 0,5pt

-3 حساب $\hat{Y}_{19}$ و $\hat{Y}_{20}$:

$\hat{Y}_{19} = 8,48125 - 0,0125(19) + 3,38125 = 11,625$ 0,5pt

$\hat{Y}_{20} = 8,48125 - 0,0125(20) + 2,14375 = 10,375$ 0,5pt

04

التمرين رقم 1:

أ- 1/ السلسلة Y_t تكون مستقرة إذا تحققت الشروط التالية: (الاستقرارية من الرتبة 2 (الاستقرارية الضعيفة))

1/ $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \mu$.

2/ $V(Y_t) = V(Y_{t+j}) = \gamma(0) = \sigma^2$.

3/ $Cov(Y_t, Y_{t+j}) = \gamma(j)$

01 pt

ب- السلسلة البيضاء: تكون ε_t سلسلة بيضاء إذا كانت عبارة عن سلسلة من المشاهدات العشوائية غير المترابطة، أي:

1/ $E(\varepsilon_t) = 0$

2/ $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$

3/ $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j}) = 0$

01 pt

باختصار يرمز للسلسلة البيضاء بـ: $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$

ج- مفكوك Wold (الوصف الخطي): يعبّد بالوصف الخطي أن السلسلة Y_t يعبّر عنها بدالة أخطاء ε_t الحالية والسابقة:

01 pt

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$Y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \theta_3 L^3 + \dots)\varepsilon_t$$

انتهى