الجمهوريـــة الجزائـريـــة الديـمقـراطيـــة الشـعـبـيـة
Democratic and Popular Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientfiic Research
et de la Recherche Scientfiique

-ميلة جامعة عبد الحفيظ بوصوف ميلة
Abdelhafid Boussouf University of Mila

ملحقة المدرسة العليا للأساتذة
Annex Highe Teacher School

نشرة دروس و أعمال تطبيقية
سنة أولى أساتذة التعليم الإبتدائي

فيزياء 1 - ميكانيك النقطة المادية -

من إعداد :

◄ الأستاذ بن لطرش محمد الصالح

السنة الجامعية: 2025-2026

المحتويات

مقدمة v

1 الفصل الأول: الأشعة، التحليل البعدي والارتيابات 1

1.1 الأشعة (Vecteurs) 1
2.1 تمثيل المقدار الشعاعي 2
3.1 العمليات الأساسية على الأشعة 3
4.1 الحساب الشعاعي (Vectoriel Calcul) 4
5.1 طرح الأشعة (Subtraction Vector) 6
6.1 ضرب الشعاع بعدد حقيقي (Scalar a by Multiplication) 6
7.1 مركبات الشعاع (Vector a of Components) 7

2 تمارين الفصل الاول مع الحلول 11

1.2 سلسلة التمارين الأولى 11
2.2 حلول تمارين السلسلة الاولى 17

3 الحركيات مفاهيم و تطبيقات 27

1.3 علم الحركة (Kinematics) 27
2.3 نسبية الحركة 27
3.3 المرجع (Frame Reference) 28
4.3 مفهوم النقطة المادية (Point Material) 28
5.3 مميزات الحركة (Characteristics Motion) 29
6.3 المعادلات الزمنية والمسار 31
7.3 الحركة الدائرية وشعاع الانتقال 32
8.3 شعاع السرعة (Vector Velocity) 36
9.3 خصائص شعاع السرعة وتطبيقاته 39
10.3 شدة السرعة وشعاع التسارع 42
11.3 العلاقات الأساسية بين الموضع والسرعة والتسارع 46

12.3 أنواع الحركة 51
13.3 الحركة المستقيمة المنتظمة ومخططات الحركة 53
14.3 الحركة المستقيمة متغيرة التسارع 58
15.3 الحركة المنحنية في المستوي 65
16.3 اشتقاق التسارع في الإحداثيات الذاتية 68

4 تمارين الفصل الحركيات مع الحلول 71
1.4 التمرين 1: الحركة المستقيمة المتغيرة 71
2.4 التمرين 2: طبيعة الحركة 71
3.4 التمرين 3: الحركة المتسارعة 71
4.4 التمرين 4: الحركة في مستوي 72
5.4 التمرين 5: الحركة في معلم ذاتي 72
6.4 التمرين 1: الحركة المستقيمة المتغيرة 73

5 تحريك النقطة المادية 81
1.5 تمثيل القوة بشعاع (Representation of Force Vector) 83
2.5 مبدأ العطالة 85
3.5 4- المرجع العطالي أو الغاليلي (Galilean Reference Frame) 86
4.5 كمية الحركة (Impulse – Momentum Linear) 90
5.5 قوانين نيوتن 93
6.5 قانون الجذب العام لنيوتن 99

6 سلسلة تمارين رقم 4 التحريك للنقطة مادية 109

7 الفصل الخامس: العمل والطاقة 119
1.7 مقدمة 119
2.7 تعريف عمل قوة 120
3.7 مثال 1.V 122
4.7 عمل قوة الوزن (القوة الثقالية) 123
5.7 مقدمة 123
6.7 تعريف عمل قوة 124
7.7 مثال 1.V 126
8.7 عمل قوة الوزن (القوة الثقالية) 126
9.7 الطاقة الحركية (energy Kinetic) 127
10.7 القوى المحافظة وغير المحافظة 128
11.7 الطاقة الكامنة (Energy Potential) 129

12.7 مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية 132

مقدمة

هذه الدروس و تمارين بحلولها مخصصة لطلبة السنة الاولى مدرسة العليا للأساتذة "أساتذة تعليم الابتدائ" ملحقة جامعة ميلة .

باب 1

الفصل الأول: الأشعة، التحليل البعدي والارتيابات

1.1 الأشعة (Vecteurs)

تتعامل الفيزياء مع نوعين رئيسيين من المقادير:

1.1.1 المقدار الفيزيائي السلمي (Quantity Scalar)

هو كمية فيزيائية يُعبّر عنها بعدد ووحدة فقط، دون اتجاه.

مثال 1

- كتلة جسم: $m = 3\,\mathrm{kg}$
- طول قضيب: $l = 1.80\,\mathrm{m}$
- طاقة نظام: $E = 100\,\mathrm{J}$
- شحنة مكثف: $Q = 5\,\mathrm{C}$
- زمن: $t = 10\,\mathrm{s}$

2.1.1 المقدار الفيزيائي الشعاعي (Quantity Vector)

هو كمية فيزيائية يُعبّر عنها بعدد ووحدة، بالإضافة إلى اتجاه ومنحى.

مثال 2

- سرعة جسم: $\vec{v}$
- وزن جسم: $\vec{P}$
- شدة المجال الكهربائي: $\vec{E}$
- قوة: $\vec{F}$
- إزاحة: $\vec{d}$

2.1 تمثيل المقدار الشعاعي

تعريف 1

يمثل المقدار الشعاعي بشعاع حيث طوله يمثل قيمة هذا المقدار.

1.2.1 الحساب الشعاعي (Vectoriel Calcul)

تعريف الشعاع $\vec{MN}$

الشعاع $\vec{MN}$ هو قطعة مستقيمة موجهة لها الخصائص التالية:

- **المبدأ (Origin):** النقطة M
- **الحامل (Support):** المستقيم (MN)
- **الاتجاه (Direction):** من M نحو N
- **الطول (Magnitude):** $|MN|$ يتمثل في طول القطعة MN

ملاحظات 1

- يمكن تمثيل الشعاع بحرف واحد: $\vec{V}$
- الشعاع الحر: يمكن نقله بشكل موازٍ دون تغيير خصائصه
- الشعاع المقيد: مرتبط بنقطة بداية محددة
- متجه الوحدة: شعاع طوله 1 في اتجاه معين

2.2.1 التمثيل الرياضي للشعاع:

في نظام إحداثي ديكارتي، يمكن تمثيل أي شعاع $\vec{V}$ كالتالي:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

حيث:

- V_x, V_y, V_z: مركبات الشعاع
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: متجهات الوحدة على المحاور

3.2.1 طول الشعاع (المقدار):

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

3.1 العمليات الأساسية على الأشعة

أ- جمع الأشعة:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

ب- طرح الأشعة:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

ج- جداء شعاع بعدد سلمي:

$$\vec{E} = k \cdot \vec{A}$$

د- الجداء السلمي (النقطي):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$$

هـ- الجداء الشعاعي (الخارجي):

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta \cdot \vec{n}$$

حيث $\vec{n}$ متجه وحدة عمودي على المستوي المحدد بـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

4.1 الحساب الشعاعي (Vectoriel Calcul)

1.4.1 مقدمة في الحساب الشعاعي

يعتبر الحساب الشعاعي من الأدوات الأساسية في الرياضيات والفيزياء لدراسة الكميات التي لها مقدار واتجاه.

2.4.1 شعاع الوحدة (Unitaire Vecteur)

تعريف 1

شعاع الوحدة هو شعاع طوله يساوي الواحد الصحيح، ويرمز له عادة بالرمز $\vec{u}$:

$$|\vec{u}| = 1$$

التعبير عن الشعاع بدلالة شعاع الوحدة

أي شعاع $\vec{v}$ يمكن التعبير عنه بدلالة شعاع الوحدة $\vec{u}$ الذي له نفس الاتجاه:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u} = v \cdot \vec{u}$$

حيث $v = |\vec{v}|$ هو طول الشعاع $\vec{v}$.

إيجاد شعاع الوحدة

لإيجاد شعاع الوحدة الموازي لشعاع معين $\vec{v}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$$

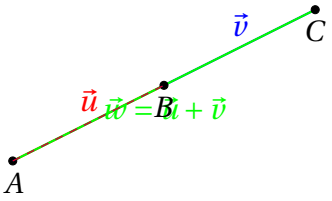
3.4.1 الجمع الشعاعي (Vectorielle Addition)

التعريف

جمع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو شعاع جديد $\vec{w}$ حيث:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

الطريقة الهندسية للجمع



شكل 1.1: الجمع الشعاعي بطريقة متوازي الأضلاع

الخواص الأساسية

1. **التبديلية (Commutativity):**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

2. **التجميعية (Associativity):**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

3. **العنصر المحايد (Element Neutral):**

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

حيث $\vec{0}$ هو الشعاع المنعدم (طولها صفر)

4. **العنصر المعاكس (Opposite):**

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

4.4.1 تمثيل الشعاع في المستوى الإحداثي

في نظام الإحداثيات، يمكن تمثيل الشعاع $\vec{v}$ بإحداثياته (x, y):

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ هما شعاعا الوحدة في اتجاهي المحورين x و y على التوالي.

مثال تطبيقي

إذا كان $\vec{u} = (2,3)$ و $\vec{v} = (1,-2)$، فإن:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2+1, 3+(-2)) = (3,1)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

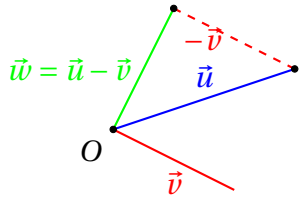
5.1 طرح الأشعة (Subtraction Vector)

1.5.1 تعريف الطرح الشعاعي

ليكن الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$، فإن الشعاع $\vec{w}$ الذي يمثل الفرق بين هذين الشعاعين يُعرف كما يلي:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

حيث $-\vec{v}$ هو الشعاع المعاكس لـ $\vec{v}$ (له نفس المقدار لكن اتجاهه معاكس).



شكل 2.1: تمثيل عملية الطرح الشعاعي

6.1 ضرب الشعاع بعدد حقيقي (Scalar a by Multiplication)

1.6.1 التعريف

ضرب الشعاع $\vec{v}$ بعدد حقيقي α هو الشعاع $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{v}$ حيث:

- إذا كان $\alpha > 0$: يكون لـ $\vec{w}$ نفس اتجاه $\vec{v}$

- إذا كان $\alpha < 0$: يكون لـ $\vec{w}$ اتجاه معاكس لـ $\vec{v}$
- إذا كان $|\alpha| > 1$: يتمدد الشعاع
- إذا كان $|\alpha| < 1$: ينكمش الشعاع

2.6.1 خواص الضرب بعدد حقيقي

لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، ولكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، تكون الخواص التالية:

1. **التجميعية:**

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

2. **التوزيعية على جمع الأشعة:**

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

3. **التوزيعية على جمع الأعداد:**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

4. **المحايد الضربي:**

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

7.1 مركبات الشعاع (Vector a of Components)

1.7.1 التعريف في المستوي الديكارتي

ليكن $\vec{v}$ شعاعاً في المعلم الديكارتي $(O, \vec{i}, \vec{j})$، حيث:

- $\vec{i}$: شعاع الوحدة في اتجاه المحور x
- $\vec{j}$: شعاع الوحدة في اتجاه المحور y

2.7.1 التعبير عن الشعاع بدلالة مركباته

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

حيث: - v_x: المركبة الأفقية للشعاع - v_y: المركبة العمودية للشعاع

3.7.1 طول الشعاع (Standard)

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

4.7.1 العلاقة مع الزاوية

إذا كان α هو الزاوية بين الشعاع $\vec{v}$ والمحور x، فإن:

$$\begin{cases} v_x = |\vec{v}| \cos\alpha \\ v_y = |\vec{v}| \sin\alpha \end{cases}$$

5.7.1 مثال تطبيقي

إذا كان $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$، فإن:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

والزاوية α مع المحور x تُعطى بالعلاقة:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 53.13^\circ$$

تعريف 1

الذبذبة هي أي حركة متكررة حول نقطة التوازن، تحدث في أنظمة مختلفة مثل الأنظمة الميكانيكية (مثل البندول)، أو الكهربائية (مثل التيار المتردد)، أو البيولوجية (مثل ضربات القلب). وعادةً ما يصف الحركة السلسة الدورية، على الرغم من أنه يمكن أن يحدث أيضًا في سياقات غير فيزيائية مثل موجات الضوء، التي تتذبذب دون اهتزاز ميكانيكي. وتشمل الأمثلة البندولات والإشارات الكهربائية والدورات الموسمية. يمكن أن تحدث التذبذبات في الأنظمة الفيزيائية أو الكيميائية أو الكهربائية أو البيولوجية.

ملاحظات 2

1-يُقال إن المذبذب متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري للشكل الجيبي (الشكل 1-1).
2- يقال أن المذبذب غير متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري لأي شكل غير جيبي

الشكل 1-2.

نظرية 3

يعطى عزم القصور الذاتي لكتلة M ذات شكل عشوائي حول نقطة A مختلفة عن مركز الثقل G بالعلاقة التالية :

$$J_{/A} = J_{/G} + M(AG)^2$$

(نظرية هوجنز-شتاينر)

مثال 3

- المذبذب التوافقي البسيط: في نظام الكتلة- النابض: تتحرك الكتلة ذهاباً وإياباً، محولة طاقة الوضع المخزنة في النابض إلى طاقة حركية والعكس صحيح.
- النواس: في النواس، تتبادل طاقة وضع الجاذبية والطاقة الحركية أثناء تأرجح البندول من جانب إلى آخر.
- اهتزاز الوتر: عندما يهتز وتر القيثارة، فإن الشد في الوتر يخزن طاقة الوضع، بينما تترجم حركة الوتر إلى طاقة حركية.

باب 2

تمارين الفصل الاول مع الحلول

1.2 سلسلة التمارين الأولى

تمرين 1:

أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين

$$\vec{V_1} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{V_2} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

تمرين 2:

أحسب الشعاع $\vec{W}$، الذي يمثل الجداء الشعاعي للشعاعين:

$$\vec{V_1} = (1, 0, -2), \quad \vec{V_2} = (2, 1, -1),$$

ثم استنتج الزاوية θ بينهما.

تمرين 3:

لتكن النقاط:

$$A(-1,-2,1), \quad B(-3,1,4), \quad C(-1,2,-3)$$

في المعلم المتعامد المتجانس $R(O,X,Y,Z)$.

1. أكتب عبارة الأشعة:

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC}.$$

ثم أحسب طويلة كل شعاع.

2. أحسب الجداء السلمي، ثم الجداء الشعاعي للشعاعين:

$$\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB}.$$

3. حدد شعاع الوحدة $\vec{U}$ من قبل الشعاع:

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}.$$

4. أحسب مركبات، وطويلة كل من الشعاعين التاليين:

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \vec{r}_3 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

5. حدد العبارات:

$$\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2), \quad |\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|, \quad |\vec{r}_3|.$$

6. حدد الزاوية بين:

$$(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \quad \text{و} \quad \vec{r}_3.$$

تمرين 4:

لنعتبر في المعلم الثابت R، والمزود بالقاعدة المتعامدة المتجانسة المباشرة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ الشعاعين التاليين:

$$\vec{V}_1 = 2t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{V}_2 = 4t\vec{i} - t\vec{j} - t\vec{k}$$

حيث t هو الزمن. نطلب حساب المشتقات:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2), \qquad \frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2).$$

1. بالحساب المباشر.
2. باستعمال خواص المشتقات الشعاعية.

تمرين 5:

لتكن الأشعة الثلاثة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ المنسوبة للمعلم المتعامد المتجانس ذو القاعدة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. أحسب مركبات الجداء الشعاعي المضاعف:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

2. استنتج العلاقة التالية:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

تمرين 6:

إذا كان الشعاع:

$$\vec{V} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

1. أحسب تباعد الشعاع $\vec{V}$ أي $div\vec{V}$.
2. برهن أن:

$$rot(\vec{V}) = \nabla \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

تمرين 7:

أي الكتابات التالية صحيحة؟ علل.

$$M = (15,2 \pm 0,02)\,\text{Kg},$$

$$M = (10,00 \pm 0,1)\,\text{Kg},$$

$$M = (130,6 \pm 0,9)\,\text{Kg}$$

تمرين 8:

قام مجموعة من الطلبة بقياسات داخل قاعة الدراسة. بعد عدة قياسات للأرضية المستطيلة اتفقوا على النتائج الآتية:

$$L = (10,0 \pm 0,1)\,\text{m}, \qquad l = (6,00 \pm 0,05)\,\text{m}$$

1. ما هي نتيجة قياس مساحة أرضية القاعة؟

تمرين 9:

يقطع متحرك مسافة، نتيجة قياسها:

$$d = (18,0 \pm 0,3)\,\text{m}$$

خلال مدة زمنية تقدر ب:

$$t = (1,5 \pm 0,1)\,\text{s}$$

1. أحسب السرعة v_0 والارتياب المطلق Δv.
2. ما هي نتيجة القياس؟

تمرين 10:

نريد قياس حجم أسطوانة متجانسة. نستعمل طريقة القياس غير المباشرة، فحصلنا على النتائج التالية:

$$d = (20,0 \pm 0,2)\,\text{cm}, \qquad h = (6,00 \pm 0,05)\,\text{cm}$$

حيث d هو قطر الأسطوانة و h هو ارتفاعها.

1. أحسب الحجم V_0 والارتياب المطلق ΔV.
2. ما هي نتيجة القياس؟

تمرين 11:

لقياس سمك اسطوانة مجوفة نقيس القطرين الداخلي D_1 و الخارجي D_2 فنجد:

$$D_2 = (26,7 \pm 0,1)\,\text{mm}$$
$$D_1 = (19,5 \pm 0,1)\,\text{mm}$$

أعط نتيجة القياس و دقته.

تمرين 12:

نريد تعيين الكتلة الحجمية ρ لمادة مكعب متجانس انطلاقا من قياس كتلته m و ضلعه a. أكتب نتيجة القياس.

تمرين 13:

تأكد من تجانس العبارة $x = \frac{1}{2}at^2$ حيث تمثل x المسافة، a التسارع و t الزمن.

تمرين 14:

ما هو بعد المقادير التالية:

- ثابت مرونة النابض
- العمل
- الاستطاعة

ملاحظة: نستعمل الرموز التالية: M بالنسبة للكتلة، T بالنسبة للزمن، و L بالنسبة للطول.

تمرين 15:

الكتلة الحجمية ρ لاسطوانة متجانسة كتلتها m, نصف قطرها R, و طولها h تعطى بالعبارة التالية:

$$\rho = \frac{m^x}{\pi h^y R^2}$$

باستعمال الأبعاد، أوجد الثابتين x و y, مستنتجاً بذلك العبارة بالضبط للكتلة الحجمية ρ.

2.2 حلول تمارين السلسلة الاولى

حل التمرين : 1

أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين:

$$\vec{V_1} = (3,2,-1), \quad \vec{V_2} = (-1,2,3)$$

الحل:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 3(-1) + 2(2) + (-1)(3) = -3 + 4 - 3 = -2$$
$$|\vec{V_1}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$
$$|\vec{V_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|} = \frac{-2}{14} = -\frac{1}{7}$$
$$\theta = \arccos\left(-\tfrac{1}{7}\right).$$

حل التمرين : 2

أحسب الشعاع $\vec{W}$، الذي يمثل الجداء الشعاعي للشعاعين:

$$\vec{V_1} = (1,0,-2), \quad \vec{V_2} = (2,1,-1),$$

ثم استنتج الزاوية θ بينهما.

الحل:

$$\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0\cdot -1 - (-2)\cdot 1)\vec{i} - (1\cdot -1 - (-2)\cdot 2)\vec{j} + (1\cdot 1 - 0\cdot 2)\vec{k}$$

$$\vec{W} = (2,-3,1).$$

الزاوية بينهما تعطى بـ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}}{|\vec{V_1}||\vec{V_2}|}.$$

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-2)(-1) = 2 + 0 + 2 = 4,$$
$$|\vec{V_1}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, \quad |\vec{V_2}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{30}}, \quad \theta = \arccos\left(\tfrac{4}{\sqrt{30}}\right).$$

حل التمرين : 3

لتكن النقاط:

$$A(-1,-2,1), \quad B(-3,1,4), \quad C(-1,2,-3).$$

الحل:

1. نكتب:

$$\overrightarrow{OA} = (-1,-2,1), \quad \overrightarrow{OB} = (-3,1,4), \quad \overrightarrow{OC} = (-1,2,-3).$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6},$$
$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2+1^2+4^2} = \sqrt{26},$$
$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{14}.$$

2. الجداء السلمي:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (-1)(-3)+(-2)(1)+(1)(4) = 3-2+4 = 5.$$

الجداء الشعاعي:

$$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2\cdot 4-1\cdot 1)\vec{i}-((-1)(4)-1(-3))\vec{j}+((-1)(1)-(-2)(-3))\vec{k}$$

$$= (-8-1)\vec{i}-(-4+3)\vec{j}+(-1-6)\vec{k} = (-9,-(-1),-7) = (-9,1,-7).$$

3.

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB} = (-1,-2,1)+2(-3,1,4) = (-1-6,-2+2,1+8) = (-7,0,9).$$

شعاع الوحدة:

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \quad |\vec{r}_1| = \sqrt{(-7)^2+0^2+9^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}.$$

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{130}}(-7,0,9).$$

.4

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (-1,-2,1) - (-3,1,4) + (-1,2,-3).$$

$$= (-1+3-1, -2-1+2, 1-4-3) = (1,-1,-6).$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (-1-3-1, -2+1+2, 1+4-3) = (-5,1,2).$$

$$|\vec{r}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38},$$

$$|\vec{r}_3| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}.$$

.5

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = (0\cdot -6 - 9\cdot -1)\vec{i} - ((-7)(-6) - 9\cdot 1)\vec{j} + ((-7)(-1) - 0\cdot 1)\vec{k}$$

$$= (0+9)\vec{i} - (42-9)\vec{j} + (7-0)\vec{k} = (9,-33,7).$$

$$\vec{r}_3 \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = (-5,1,2)\cdot(9,-33,7) = -45-33+14 = -64.$$

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2| = \sqrt{9^2 + (-33)^2 + 7^2} = \sqrt{81+1089+49} = \sqrt{1219}.$$

.6 الزاوية:

$$\cos\theta = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)\cdot \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2||\vec{r}_3|} = \frac{-64}{\sqrt{1219}\cdot\sqrt{30}}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{-64}{\sqrt{1219}\cdot\sqrt{30}}\right).$$

حل التمرين : 4

لنعتبر في المعلم الثابت R، والمزود بالقاعدة المتعامدة المتجانسة المباشرة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ الشعاعين التاليين:

$$\vec{V}_1 = 2t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{V}_2 = 4t\vec{i} - t\vec{j} - t\vec{k}$$

حيث t هو الزمن. نطلب حساب المشتقات:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right), \qquad \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2\right).$$

بالحساب المباشر.

$$\vec{V}_1 = (2t,\, t,\, 1), \quad \vec{V}_2 = (4t,\, -t,\, -t).$$

أولا الجداء الشعاعي:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & t & 1 \\ 4t & -t & -t \end{vmatrix} = (0)\vec{i} + (6t)\vec{j} + (-6t^2 - 4t)\vec{k}.$$

إذن:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (0,\, 6t,\, -6t^2 - 4t).$$

المشتقة:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (0,\, 6,\, -12t - 4).$$

ثانيا الجداء السلمي:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (2t)(4t) + (t)(-t) + (1)(-t) = 8t^2 - t^2 - t = 7t^2 - t.$$

المشتقة:

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = 14t - 1.$$

باستعمال خواص المشتقات الشعاعية.

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1{}' \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2{}',$$

و

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1{}' \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2{}'.$$

بحساب $\vec{V}_1{}' = (2, 1, 0)$ و $\vec{V}_2{}' = (4, -1, -1)$ نجد نفس النتائج السابقة.

حل التمرين : 5

لتكن الأشعة الثلاثة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ المنسوبة للمعلم المتعامد المتجانس ذو القاعدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. أحسب مركبات الجداء الشعاعي المضاعف:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

2. استنتج العلاقة التالية:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

1. باستعمال تعريف الجداء الشعاعي المضاعف نكتب:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ (V_2 \wedge V_3)_x & (V_2 \wedge V_3)_y & (V_2 \wedge V_3)_z \end{vmatrix}.$$

2. بعد التبسيط الجبري نحصل على:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3.$$

وهي العلاقة المطلوبة.

حل التمرين : 6

إذا كان الشعاع:

$$\vec{V}(x, y, z) = (2xy + z^3)\,\vec{i} + (x^2 + 2y)\,\vec{j} + (3xz^2 - 2)\,\vec{k},$$

أجب عن ما يلي:

1. أحسب تباعد الشعاع $\operatorname{div}\vec{V}$.

2. برهن أن:

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \nabla \wedge \vec{V} = \vec{0}.$$

بالإضافة، استنتج ما إذا كان $\vec{V}$ متحفظاً (أي إذا كان هناك دالة جهد φ بحيث $\nabla\varphi = \vec{V}$).

1. **حساب التباعد** $\operatorname{div}\vec{V}$.

بالتعريف:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z.$$

نحسب كل مشتقة جزئية على حدة:

$$\frac{\partial}{\partial x}V_x = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z^3) = 2y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}V_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2y) = 2,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}V_z = \frac{\partial}{\partial z}(3xz^2 - 2) = 6xz.$$

ثم:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = 2y + 2 + 6xz.}$$

2. **حساب الدوران** $\operatorname{rot}\vec{V}$.

نستخدم الصيغة المركّبة:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).$$

نحسب كل مكوّن على حدة:

- المكوّن الأول:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - 2) = 0, \qquad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + 2y) = 0,$$

إذًا المكوّن الأول يساوي $0 - 0 = 0$.

- المكوّن الثاني:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^3) = 3z^2, \qquad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - 2) = 3z^2,$$

إذًا المكوّن الثاني يساوي $3z^2 - 3z^2 = 0$.

• المكوّن الثالث:

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y) = 2x, \qquad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + z^3) = 2x,$$

إذًا المكوّن الثالث يساوي $2x - 2x = 0$.

بالتالي:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{V} = (0,0,0) = \vec{0}.}$$

حل التمرين : 7

الكتابة الصحيحة هي: $M = (130,6 \pm 0,9)\,\mathrm{kg}$

لأن عدد الأرقام المعنوية في القياس الرئيسي (6.130) يتوافق مع عدد الأرقام المعنوية في الارتياب (9.0)، حيث أن الارتياب مكتوب برقم معنوي واحد بعد الفاصلة.

حل التمرين : 8

$$A_0 = l \times L = 6,00 \times 10,0 = 60,0\,\mathrm{m}^2$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,05}{6,00} + \frac{0,1}{10,0} = 0,00833 + 0,01 = 0,01833$$

$$\Delta A = A_0 \times 0,01833 = 60,0 \times 0,01833 \approx 1,1\,\mathrm{m}^2$$

$$\boxed{A = (60,0 \pm 1,1)\,\mathrm{m}^2}$$

حل التمرين : 9

$$v_0 = \frac{d}{t} = \frac{18,0}{1,5} = 12,0\,\text{m/s}$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t} = \frac{0,3}{18,0} + \frac{0,1}{1,5} = 0,01667 + 0,06667 = 0,08334$$

$$\Delta v = v_0 \times 0,08334 = 12,0 \times 0,08334 \approx 1,0\,\text{m/s}$$

$$\boxed{v = (12,0 \pm 1,0)\,\text{m/s}}$$

حل التمرين : 10

$$r = \frac{d}{2} = 10,0\,\text{cm} \quad \Delta r = \frac{\Delta d}{2} = 0,1\,\text{cm}$$

$$V_0 = \pi r^2 h = \pi \times (10,0)^2 \times 6,00 \approx 1884,96\,\text{cm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} = 2 \times \frac{0,1}{10,0} + \frac{0,05}{6,00} = 0,02 + 0,00833 = 0,02833$$

$$\Delta V = V_0 \times 0,02833 \approx 1884,96 \times 0,02833 \approx 53,4\,\text{cm}^3$$

$$\boxed{V = (1885 \pm 53)\,\text{cm}^3}$$

حل التمرين : 11

$$e = \frac{D_2 - D_1}{2} = \frac{26,7 - 19,5}{2} = \frac{7,2}{2} = 3,6\,\text{mm}$$

$$\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2} = \frac{0,1 + 0,1}{2} = 0,1\,\text{mm}$$

$$\boxed{e = (3,6 \pm 0,1)\,\text{mm}}$$

حل التمرين : 12

$$\rho = \frac{m}{a^3}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \pm \Delta\rho}$$

حل التمرين : 13

$$[x] = L$$

$$[\frac{1}{2}at^2] = [a][t]^2 = (LT^{-2})(T^2) = L$$

بما أن $[x] = [\frac{1}{2}at^2] = L$، إذا العبارة متجانسة.

حل التمرين : 14

- ثابت مرونة النابض: $[k] = MT^{-2}$
- العمل: $[W] = ML^2T^{-2}$
- الاستطاعة: $[P] = ML^2T^{-3}$
- الضغط: $[p] = ML^{-1}T^{-2}$

حل التمرين : 15

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$\left[\frac{m^x}{h^y R^2}\right] = \frac{M^x}{L^y L^2} = M^x L^{-(y+2)}$$

$$M^x L^{-(y+2)} = M^1 L^{-3}$$

$$x = 1, \quad -(y+2) = -3 \Rightarrow y = 1$$

$$\boxed{\rho = \frac{m}{\pi h R^2}}$$

باب 3

الحركيات مفاهيم و تطبيقات

1.3 علم الحركة (Kinematics)

هو فرع من الفيزياء يَدرس حركة الأجسام دون الاهتمام بمُسببات هذه الحركة (أي القوى).
يتناول هذا العلم وصف التغير في وضعية الجسم مع مرور الزمن، وسرعته، وتسارعه، ومساره، والمسافة التي يقطعها خلال فترة حركته.

2.3 نسبية الحركة

الحركة والسكون مفهومان نسبيان، فلا يمكن وصف جسم ما بأنه في حالة سكون مُطلق أو حركة مُطلقة.

مثال 1

- قاعة الدرس تكون في حالة **سكون** بالنسبة للأرض.
- ولكنها في حالة **حركة** بالنسبة لمراقب موجود على سطح القمر.

لذلك، من الضروري دائمًا اختيار مرجع معين لدراسة حركة الجسم.

3.3 المرجع (Frame Reference)

تعريف 1

المرجع هو جسم فيزيائي نختاره لدراسة حركة جسم آخر، حيث نُنسِب حركة الجسم الثاني إلى الجسم الأول (المرجع).
ولإجراء الدراسة الحركية لجسم ما بالنسبة لمرجع معين، يجب ربط هذا المرجع بجملة إحداثيات (معلم) لتحديد موضع الجسم بدقة في أي لحظة زمنية.

1.3.3 اختيار المعلم المناسب:

- إذا كانت الحركة في **الفضاء**: نستخدم المعلم $R(O,x,y,z)$
- إذا كانت الحركة في **المستوي**: نستخدم المعلم $R(O,x,y)$
- إذا كانت الحركة على **خط مستقيم**: يكفي استخدام المعلم $R(O,x)$

4.3 مفهوم النقطة المادية (Point Material)

تعريف 1

النقطة المادية هي نموذج مثالي في الفيزياء نستخدمه لتبسيط دراسة حركة الأجسام. نعتبر الجسم نقطة مادية عندما:

1.4.3 شروط اعتبار الجسم نقطة مادية

- **إهمال الحركة الدورانية**: أي أننا لا نهتم بحركة الجسم الدورانية حول نفسه، ونهتم فقط بحركته الانسحابية (انتقاله من موضع لآخر)
- **صغر الأبعاد**: عندما تكون أبعاد الجسم صغيرة جداً مقارنة بأبعاد المرجع المستخدم في الدراسة، بحيث يمكن إهمالها
- **الحفاظ على الكتلة**: كتلة النقطة المادية تساوي كتلة الجسم الحقيقي الذي تمثله

مثال 2

- الأرض تعتبر نقطة مادية عند دراسة حركتها حول الشمس
- سيارة تعتبر نقطة مادية عند دراسة حركتها بين مدينتين
- كرة تعتبر نقطة مادية عند دراسة مسار قذيفتها

5.3 مميزات الحركة (Characteristics Motion)

1.5.3 شعاع الموضع (Vector Position)

تعريف 1: الرياضي التعريف

يعرّف موضع نقطة مادية متحركة M في اللحظة t في المعلم الكارتيزي ثلاثي الأبعاد بالعلاقة:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

حيث:

- $\overrightarrow{OM}(t)$: شعاع الموضع عند اللحظة t
- $x(t), y(t), z(t)$: الإحداثيات الكارتيزية التي تعبر عن موقع النقطة
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: متجهات الوحدة على المحاور x, y, z على التوالي

التمثيل الإحداثي

يمكن تمثيل شعاع الموضع في صورة مصفوفة:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

2.5.3 حالات الحركة والسكون

حالة السكون

إذا كانت النقطة المادية في حالة سكون، فإن إحداثياتها x, y, z تكون قيماً ثابتة ومستقلة عن الزمن:

$$x = \text{ثابت}, \quad y = \text{ثابت}, \quad z = \text{ثابت}$$

حالة الحركة

إذا كانت النقطة المادية في حالة حركة، فإن إحداثياتها تكون دوالاً في الزمن:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

وتسمى هذه الدوال بالمعادلات الزمنية للحركة.

3.5.3 العلاقة بين شعاع الموضع والزمن

- يمثل شعاع الموضع موقع الجسم في الفضاء عند كل لحظة زمنية
- تغير شعاع الموضع مع الزمن يحدد مسار الحركة
- مشتقة شعاع الموضع تعطي سرعة الجسم
- المشتقة الثانية تعطي تسارع الجسم

4.5.3 أهمية شعاع الموضع

- يحدد الموقع الدقيق للنقطة في الفضاء
- أساس لحساب السرعة والتسارع
- يساعد في تحديد مسار الحركة
- أداة أساسية في التحليل الرياضي للحركة

6.3 المعادلات الزمنية والمسار

1.6.3 المعادلات الزمنية (Equations Time)

تُسمى الدوال التي تعبر عن إحداثيات النقطة المادية بدلالة الزمن بـ**المعادلات الزمنية** لحركة النقطة M، أي:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

2.6.3 المسار (Trajectory)

المسار هو المحل الهندسي للمواضع المتتالية التي تشغلها النقطة المادية أثناء حركتها.

3.6.3 الفرق بين المعادلات الزمنية ومعادلة المسار

- **المعادلات الزمنية**: تعبر عن إحداثيات النقطة كدوال في الزمن

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- **معادلة المسار**: تعبر عن العلاقة بين الإحداثيات المكانية بعد حذف الزمن

$$z = g(x) \quad \text{و} \quad y = f(x) \quad \text{(في المستوي)}$$

مثال 3

المعطيات

لتكن المعادلات الزمنية لحركة نقطة مادية:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

المطلوب

1. أوجد معادلة المسار وشكله
2. اكتب عبارة شعاع الموضع عند لحظة كيفية t، ثم استنتج عبارته عند اللحظة $t = 1s$

الحل

1. إيجاد معادلة المسار: من المعادلة الأولى: $x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$
نعوض في المعادلة الثالثة:

$$z = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) = -5\left(\frac{x^2}{4}\right) + 2x = -1.25x^2 + 2x$$

من المعادلة الثانية: $y = 0$
إذن معادلة المسار هي:

$$\begin{cases} z = -1.25x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases}$$

تحديد شكل المسار: المعادلة $z = -1.25x^2 + 2x$ تمثل قطعاً مكافئاً في المستوي $y = 0$ (المستوي xz).

شعاع الموضع: عبارة شعاع الموضع عند اللحظة t هي:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = 2t\vec{i} + 0\vec{j} + (-5t^2 + 4t)\vec{k}$$

شعاع الموضع عند $t = 1s$:

$$\overrightarrow{OM}(1) = 2(1)\vec{i} + 0\vec{j} + (-5(1)^2 + 4(1))\vec{k} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + (-1)\vec{k}$$

4.6.3 التحليل الفيزيائي

- الحركة تحدث في المستوي $y = 0$ (المستوي xz)
- المسار قطع مكافئ، مما يشير إلى حركة تحت تأثير تسارع ثابت (كالسقوط الحر)
- عند $t = 1s$ تكون النقطة عند الموقع $(2, 0, -1)$
- القطع المكافئ مفتوح للأسفل (معامل x^2 سالب)

7.3 الحركة الدائرية وشعاع الانتقال

مثال 4

1.7.3 المثال 1: الحركة في مستوى مائل

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

وبالتعويض من المعادلات الزمنية:

$$\overrightarrow{OM}(t) = 2t\vec{i} + 0\vec{j} + (-5t^2 + 4t)\vec{k}$$

عند اللحظة $t = 1s$:

$$\overrightarrow{OM}(1) = 2(1)\vec{i} + (-5(1)^2 + 4(1))\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{k}$$

التفسير الفيزيائي

- الحركة في المستوي $y = 0$ (مستوي xz)
- القطع المكافئ يشير إلى تسارع ثابت في اتجاه المحور z
- هذا النموذج يمثل حركة مقذوف تحت تأثير الجاذبية

مثال 5

2.7.3 المثال 2: الحركة الدائرية المنتظمة

المعطيات

معادلات الحركة الدائرية:

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi), \quad y(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

حيث:

- a: نصف قطر الدائرة
- ω: السرعة الزاوية
- φ: طور ابتدائي

إثبات أن المسار دائري

$$x^2 + y^2 = [a\sin(\omega t + \varphi)]^2 + [a\cos(\omega t + \varphi)]^2$$
$$= a^2[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = a^2(1) = a^2$$

إذن:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها a.

ملاحظات 1

تطبيقات واقعية للحركة الدائرية

1. **حركة القمر الصناعي**: يدور حول الأرض في مسار دائري تقريباً
2. **حركة الإلكترون**: حول النواة في الذرة (نموذج بور)

3.7.3 شعاع الانتقال (Vector Displacement)

التعريف الرياضي

إذا كان المتحرك في الموضع M عند اللحظة t_1، ثم انتقل إلى الموضع M' عند اللحظة t_2، فإن شعاع الانتقال هو:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)$$

التمثيل الهندسي

شعاع الانتقال هو المتجه الذي يربط نقطة البداية بنقطة النهاية
ويمثل أقصر مسافة بين الموضعين

مثال 6

مثال تطبيقي مفصل

مثال : سيارة تتحرك في مدينة، إحداثياتها بدلالة الزمن:

$$\overrightarrow{OM}(t) = (2t)\vec{i} + (t^2)\vec{j}$$

المطلوب: أوجد شعاع الانتقال بين اللحظتين $t = 1s$ و $t = 3s$

الحل:

1. الموضع عند $t = 1s$:

$$\overrightarrow{OM}(1) = 2(1)\vec{i} + (1)^2\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

2. الموضع عند $t = 3s$:

$$\overrightarrow{OM}(3) = 2(3)\vec{i} + (3)^2\vec{j} = 6\vec{i} + 9\vec{j}$$

3. شعاع الانتقال:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM}(3) - \overrightarrow{OM}(1) = (6-2)\vec{i} + (9-1)\vec{j} = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

التفسير الفيزيائي:

- السيارة تحركت 4 وحدات في اتجاه x
- و 8 وحدات في اتجاه y
- المسافة الإجمالية المقطوعة أكبر من طول شعاع الانتقال بسبب انحناء المسار

4.7.3 الفرق بين المسافة المقطوعة وشعاع الانتقال

- **شعاع الانتقال**: متجه يربط نقطتي البداية والنهاية (يعتمد على الموضعين فقط)
- **المسافة المقطوعة**: طول المسار الفعلي الذي سلكه الجسم (يعتمد على شكل المسار)

8.3 شعاع السرعة (Vector Velocity)

1.8.3 أ- شعاع السرعة المتوسطة (Vector Velocity Average)

التعريف الرياضي

يعرف شعاع السرعة المتوسطة بين لحظتين t_1 و t_2 بالعلاقة:

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\text{شعاع الانتقال}}{\text{المدة الزمنية}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

الرموز المستخدمة

- $\overrightarrow{OM}(t_1)$: شعاع الموضع عند اللحظة t_1
- $\overrightarrow{OM}(t_2)$: شعاع الموضع عند اللحظة t_2
- $\Delta t = t_2 - t_1$: المدة الزمنية
- $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)$: شعاع الانتقال

مثال 7

مثال تطبيقي

سيارة تتحرك في المستوي، إحداثياتها:

$$\overrightarrow{OM}(t) = (3t)\vec{i} + (2t^2)\vec{j}$$

أوجد السرعة المتوسطة بين $t = 1s$ و $t = 3s$

الحل:

$$\overrightarrow{OM}(1) = 3(1)\vec{i} + 2(1)^2\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM}(3) = 3(3)\vec{i} + 2(3)^2\vec{j} = 9\vec{i} + 18\vec{j}$$
$$\Delta\overrightarrow{OM} = (9-3)\vec{i} + (18-2)\vec{j} = 6\vec{i} + 16\vec{j}$$
$$\Delta t = 3 - 1 = 2s$$
$$\vec{V}_{moy} = \frac{6\vec{i} + 16\vec{j}}{2} = 3\vec{i} + 8\vec{j}\,\text{m/s}$$

2.8.3 ب- شعاع السرعة اللحظية (Vector Velocity Instantaneous)

التعريف الرياضي

إذا كانت اللحظة t_2 قريبة جداً من t_1 (أي $\Delta t \to 0$)، فإن السرعة المتوسطة تؤول إلى السرعة اللحظية:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

التعبير في الإحداثيات الديكارتية

إذا كان:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

فإن:

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

مثال 8

مثال تطبيقي

جسم يتحرك وفق المعادلات:

$$x(t) = 2t^2 + 3t, \quad y(t) = 4t^3 - 2t, \quad z(t) = 5$$

أوجد السرعة اللحظية عند أي لحظة t

الحل:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t + 3$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 12t^2 - 2$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0$$
$$\vec{V}(t) = (4t+3)\vec{i} + (12t^2 - 2)\vec{j}\,\text{m/s}$$

3.8.3 الفرق بين السرعة المتوسطة واللحظية

النوع	التعريف	التطبيق
السرعة المتوسطة	متوسط التغير في الموضع خلال فترة زمنية	يستخدم في قياس الأداء العام
السرعة اللحظية	معدل التغير اللحظي في الموضع	يستخدم في تحليل الحركة التفصيلي

4.8.3 خصائص شعاع السرعة

- **الاتجاه**: يكون مماسياً للمسار عند كل نقطة
- **المقدار**: يمثل سرعة الجسم عند تلك اللحظة
- **الوحدة**: متر/ثانية (m/s) في النظام الدولي
- **الدلالة الفيزيائية**: يصف كيفية تغير موضع الجسم مع الزمن

مثال 9

تطبيق عملي: نظام الفرامل في السيارات

- تحسب أنظمة الأمان السرعة اللحظية للسيارة
- تستخدم هذه المعلومات لتحديد مسافة التوقف
- تساعد في تفعيل الفرامل المانعة للانغلاق (ABS)
- تحسن من كفاءة وأنظمة التحكم بالثبات

5.8.3 العلاقة بين السرعة والموضع

- السرعة هي المشتقة الأولى للموضع بالنسبة للزمن
- يمكن إيجاد الموضع من السرعة بالتكامل:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{V}(\tau)d\tau$$

- هذه العلاقة أساسية في حل مسائل الحركة

9.3 خصائص شعاع السرعة وتطبيقاته

1.9.3 الملاحظات الهامة حول شعاع السرعة

العلاقة الأساسية

شعاع السرعة في لحظة ما t يساوي مشتق شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}(t)$ بالنسبة للزمن:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

الخاصية الهندسية الهامة

- **شعاع السرعة يكون مماسياً للمسار** عند النقطة M المدروسة
- **اتجاه الشعاع يمثل اتجاه الحركة** اللحظية للجسم
- **مقدار الشعاع** يمثل السرعة اللحظية للجسم

2.9.3 التعبير في الإحداثيات الكارتيزية

شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

شعاع السرعة

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} \\ &= V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\end{aligned}$$

3.9.3 ترميز نيوتن للمشتقات الزمنية

نرمز إلى مشتقة متغير بالنسبة للزمن بوضع نقطة فوق الحرف الذي يرمز للمتغير:

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

مثال 10

أمثلة على الترميز النيوتني

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$
$$\frac{dV_x}{dt} = \dot{V}_x$$

ملاحظات 2

4.9.3 وحدات القياس

الوحدة الدولية للسرعة

m/s (متر لكل ثانية)

وحدات أخرى مستخدمة

- كيلومتر في الساعة: km/h
- سنتيمتر في الثانية: cm/s
- ميل في الساعة: mph

5.9.3 التمثيل المصفوفي

شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

شعاع السرعة

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{z} = V_z \end{pmatrix}$$

مثال 11

6.9.3 مثال تطبيقي شامل

المعطيات

جسم يتحرك في المستوي وفق المعادلات:

$$x(t) = 3t^2 + 2t, \quad y(t) = 4t^3 - 6t, \quad z(t) = 5$$

المطلوب

1. أوجد شعاع السرعة اللحظية
2. احسب السرعة عند $t = 2s$
3. حدد اتجاه الحركة عند هذه اللحظة

الحل

1. **شعاع السرعة اللحظية:**

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 6t + 2$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = 12t^2 - 6$$
$$V_z = \frac{dz}{dt} = 0$$
$$\vec{V}(t) = (6t+2)\vec{i} + (12t^2 - 6)\vec{j}$$

2. **السرعة عند** $t = 2s$:

$$V_x(2) = 6(2) + 2 = 14\,\text{m/s}$$
$$V_y(2) = 12(4) - 6 = 48 - 6 = 42\,\text{m/s}$$
$$\vec{V}(2) = 14\vec{i} + 42\vec{j}\,\text{m/s}$$

3. **مقدار السرعة واتجاهها:**

$$|\vec{V}(2)| = \sqrt{14^2 + 42^2} = \sqrt{196 + 1764} = \sqrt{1960} \approx 44.27\,\text{m/s}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{42}{14}\right) = \tan^{-1}(3) \approx 71.57^\circ$$

10.3 شدة السرعة وشعاع التسارع

1.10.3 شدة شعاع السرعة اللحظية

التعريف الرياضي

شدة شعاع السرعة اللحظية (المقدار) تُحسب من المركبات الكارتيزية للسرعة:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

مثال 12

مثال تطبيقي

إذا كانت مركبات السرعة لجسم ما:

$$V_x = 3\,\text{m/s}, \quad V_y = 4\,\text{m/s}, \quad V_z = 0\,\text{m/s}$$

فإن شدة السرعة:

$$V = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\,\text{m/s}$$

2.10.3 شعاع التسارع (Vector Acceleration)

تعريف 1

التسارع هو الكمية الفيزيائية التي تعبر عن معدل تغير السرعة مع الزمن. وهو كمية متجهة تمثل مقدار واتجاه التغير في السرعة.

أ- شعاع التسارع المتوسط (Vector Acceleration Average)

التعريف الرياضي

شعاع التسارع المتوسط بين لحظتين t_1 و t_2 يعرف بالعلاقة:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

الرموز المستخدمة

- $\vec{v}(t_1)$: السرعة عند اللحظة t_1
- $\vec{v}(t_2)$: السرعة عند اللحظة t_2
- $\Delta t = t_2 - t_1$: الفترة الزمنية
- $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$: التغير في السرعة

مثال 13

مثال تطبيقي

سيارة تتحرك في خط مستقيم، سرعتها:

$$\vec{v}(2) = 20\vec{i}\,\text{m/s}, \quad \vec{v}(5) = 35\vec{i}\,\text{m/s}$$

أوجد التسارع المتوسط بين $t = 2s$ و $t = 5s$:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{35\vec{i} - 20\vec{i}}{5-2} = \frac{15\vec{i}}{3} = 5\vec{i}\,\text{m/s}^2$$

ملاحظات 3

الخاصية الهندسية

شعاع التسارع المتوسط يكون دوماً متجهاً نحو تقعر المسار، بغض النظر عن موضع المتحرك.

ب- شعاع التسارع اللحظي (Vector Acceleration Instantaneous)

التعريف الرياضي

عندما تقترب الفترة الزمنية Δt من الصفر، يؤول التسارع المتوسط إلى التسارع اللحظي:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

العلاقة مع شعاع الموضع

بما أن $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$، فإن:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2}$$

التعبير في الإحداثيات الكارتيزية

إذا كان:

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

فإن:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

مثال 14

مثال تطبيقي شامل

جسم يتحرك وفق المعادلات:

$$x(t) = 2t^3 - 3t^2, \quad y(t) = 4t^2 + 2t, \quad z(t) = 5t$$

المطلوب: أوجد التسارع اللحظي عند $t = 1s$ **الحل:**

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t + 2$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = 5$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12t - 6$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 8$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$
$$\vec{a}(t) = (12t - 6)\vec{i} + 8\vec{j}$$

عند $t = 1s$:

$$\vec{a}(1) = (12 - 6)\vec{i} + 8\vec{j} = 6\vec{i} + 8\vec{j}\,\mathrm{m/s^2}$$

العلاقة بين السرعة والتسارع

الكمية	التعريف	العلاقة الرياضية
السرعة	معدل تغير الموضع	$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$
التسارع	معدل تغير السرعة	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

11.3 العلاقات الأساسية بين الموضع والسرعة والتسارع

العلاقة الأساسية

شعاع التسارع في لحظة ما يساوي مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

الأشعة المميزة للحركة في المعلم الديكارتي

شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

شعاع السرعة

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

شعاع التسارع

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

1.11.3 وحدات القياس

الوحدة الدولية للتسارع

$$\mathrm{m/s^2} = \mathrm{ms^{-2}}$$

شدة التسارع (المقدار)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ملاحظات 4

الملاحظات الفيزيائية الهامة

اتجاه التسارع والمسار

جهة التسارع تكون دوماً نحو تقعر المسار (إذا كانت الحركة منحنية). هذا يعني أن التسارع يتجه دائماً نحو مركز الانحناء في الحركة المنحنية.

الحركة المتسارعة

تكون الحركة متسارعة إذا كان:

$$\vec{a} \cdot \vec{V} > 0$$

وهذا يعني أن الزاوية بين متجهي التسارع والسرعة حادة، وأن السرعة تزداد مع الزمن.

الحركة المتباطئة

تكون الحركة متباطئة إذا كان:

$$\vec{a} \cdot \vec{V} < 0$$

وهذا يعني أن الزاوية بين متجهي التسارع والسرعة منفرجة، وأن السرعة تتناقص مع الزمن.

اتجاه الحركة

اتجاه شعاع السرعة هو الذي يمثل اتجاه الحركة، وليس شعاع التسارع. التسارع يصف كيفية تغير السرعة وليس اتجاه الحركة اللحظي.

مثال 15

مثال تطبيقي شامل

المعطيات

جسم يتحرك وفق المعادلات:

$$x(t) = 3t^2 + 2t, \quad y(t) = 4t^3 - 6t, \quad z(t) = 0$$

المطلوب

1. أوجد شعاعي السرعة والتسارع
2. احسب شدة التسارع عند $t = 1s$
3. حدد نوع الحركة (متسارعة أم متباطئة) عند $t = 1s$

الحل

1. **شعاع السرعة:**

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 6t + 2$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = 12t^2 - 6$$
$$\vec{V}(t) = (6t+2)\vec{i} + (12t^2 - 6)\vec{j}$$

2. **شعاع التسارع:**

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = 24t$$
$$\vec{a}(t) = 6\vec{i} + 24t\vec{j}$$

3. **شدة التسارع عند** $t = 1s$:

$$\vec{a}(1) = 6\vec{i} + 24\vec{j}$$
$$a = \sqrt{6^2 + 24^2} = \sqrt{36 + 576} = \sqrt{612} \approx 24.74\,\mathrm{m/s^2}$$

4. **نوع الحركة عند** $t = 1s$:

$$\vec{V}(1) = (6+2)\vec{i} + (12-6)\vec{j} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$$
$$\vec{a}(1) = 6\vec{i} + 24\vec{j}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{V} = (6)(8) + (24)(6) = 48 + 144 = 192 > 0$$

بما أن $\vec{a} \cdot \vec{V} > 0$، فإن الحركة متسارعة.

مثال 16

مثال تطبيقي شامل على السرعة والتسارع

2.11.3 المعطيات

شعاع الموضع في المعلم الديكارتي يعطى بالمعادلات التالية:

$$x = 2t^2, \quad y = 4t - 5, \quad z = t^3$$

حيث t الزمن بالثواني، والإحداثيات بالأمتار.

3.11.3 المطلوب

1. استنتج شعاع السرعة وشعاع التسارع اللحظيين عند لحظة كيفية t، وما هي عبارة شدة كل منهما؟
2. استنتج شدة كل منهما عند اللحظة $t = 2s$

4.11.3 الحل

1. إيجاد شعاع السرعة وشعاع التسارع

شعاع السرعة $\vec{V}(t)$:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2) = 4t$$
$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(4t - 5) = 4$$
$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2$$
$$\vec{V}(t) = 4t\vec{i} + 4\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

شدة السرعة V :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(4t)^2 + (4)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4}$$

شعاع التسارع $\vec{a}(t)$:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}(4) = 0$$
$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2) = 6t$$
$$\vec{a}(t) = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 6t\vec{k}$$

شدة التسارع a :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (6t)^2} = \sqrt{16 + 36t^2}$$

2. الحسابات عند اللحظة $t = 2s$

شعاع السرعة عند $t = 2s$:

$$V_x(2) = 4 \times 2 = 8\,\text{m/s}$$
$$V_y(2) = 4\,\text{m/s}$$
$$V_z(2) = 3 \times (2)^2 = 12\,\text{m/s}$$
$$\vec{V}(2) = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}\,\text{m/s}$$

شدة السرعة عند $t = 2s$:

$$V(2) = \sqrt{8^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 16 + 144} = \sqrt{224} \approx 14.97\,\text{m/s}$$

شعاع التسارع عند $t = 2s$:

$$a_x(2) = 4\,\text{m/s}^2$$
$$a_y(2) = 0\,\text{m/s}^2$$
$$a_z(2) = 6 \times 2 = 12\,\text{m/s}^2$$
$$\vec{a}(2) = 4\vec{i} + 12\vec{k}\,\text{m/s}^2$$

شدة التسارع عند $t = 2s$:

$$a(2) = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} \approx 12.65\,\text{m/s}^2$$

12.3 أنواع الحركة

1.12.3 تصنيف الحركات حسب المسار

إذا اتخذنا المسار كمعيار لتصنيف الحركات، فإن لدينا نوعين رئيسيين من الحركة المستوية:

- **حركة مستقيمة** (Motion Rectilinear)
- **حركة منحنية** (Motion Curvilinear) - الحركة الدائرية حالة خاصة منها

2.12.3 1 الحركات المستقيمة (Motions Rectilinear)

أ- الحركة المستقيمة المنتظمة (Motion Rectilinear Unfiorm)

التعريف: تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة منتظمة إذا تحققت الشروط التالية:

- المسار مستقيم
- شعاع السرعة ثابت (مقداراً واتجاهاً)
- شعاع التسارع معدوم

الشروط الرياضية:

$$\vec{a} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{v} = \vec{C}^{te}$$

ب- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام (Motion Rectilinear Accelerated Unfiormly)

التعريف: تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام إذا تحققت الشروط التالية:

- المسار مستقيم
- التسارع ثابت (مقداراً واتجاهاً)

المعادلات الزمنية:

$$v(t) = a(t - t_0) + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

عندما $t_0 = 0$:

$$v(t) = at + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

3.12.3 الحركات المنحنية (Motions Curvilinear)

أ- الحركة الدائرية (Motion Circular)

- المسار دائري
- السرعة الزاوية قد تكون ثابتة أو متغيرة
- يوجد تسارع مركزي حتى لو كانت السرعة ثابتة

ب- الحركة القطعية (Motion Parabolic)

- مسار على شكل قطع مكافئ
- مثال: حركة المقذوفات تحت تأثير الجاذبية

ج- الحركة الإهليلجية (Motion Elliptical)

- مسار على شكل قطع ناقص
- مثال: حركة الكواكب حول الشمس

4.12.3 مقارنة بين أنواع الحركة

نوع الحركة	المسار	السرعة	التسارع
مستقيمة منتظمة	مستقيم	ثابت	معدوم
مستقيمة متغيرة بانتظام	مستقيم	متغير خطياً	ثابت
دائرية منتظمة	دائري	ثابت المقدار	موجود (مركزي)
منحنية عامة	منحني	متغير	موجود

13.3 الحركة المستقيمة المنتظمة ومخططات الحركة

1.13.3 اشتقاق المعادلة الزمنية للحركة المستقيمة المنتظمة

الخطوات الرياضية:

$$\frac{dx(t)}{dt} = V$$
$$dx(t) = V\,dt$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} V\,dt$$
$$x - x_0 = V(t - t_0)$$

المعادلة الزمنية للفاصلة:

$$x(t) = V(t - t_0) + x_0$$

الحالة الخاصة عندما $t_0 = 0$:

$$x(t) = V\,t + x_0$$

مخططات الحركة (Diagrams Motion)

التعريف:

تتمثل مخططات الحركة في التمثيل البياني لكل من:

- التسارع بدلالة الزمن
- السرعة بدلالة الزمن
- الفاصلة (الموضع) بدلالة الزمن

2.13.3 مثال تطبيقي للحركة المستقيمة المنتظمة

المعطيات:

- السرعة: $V = 5\,\mathrm{m/s}$

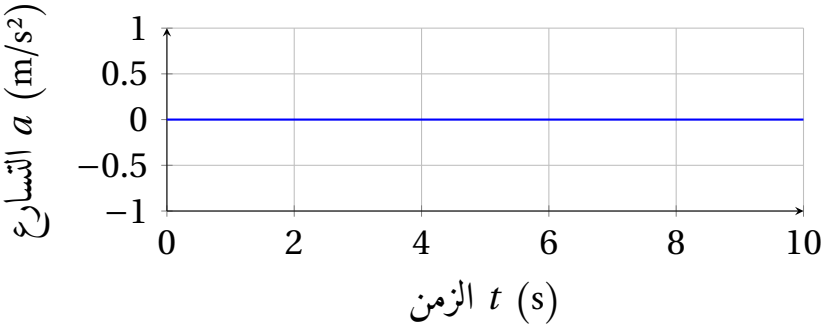
- الموضع الابتدائي: $x_0 = 2\,\mathrm{m}$
- الزمن الابتدائي: $t_0 = 0$

المعادلات:

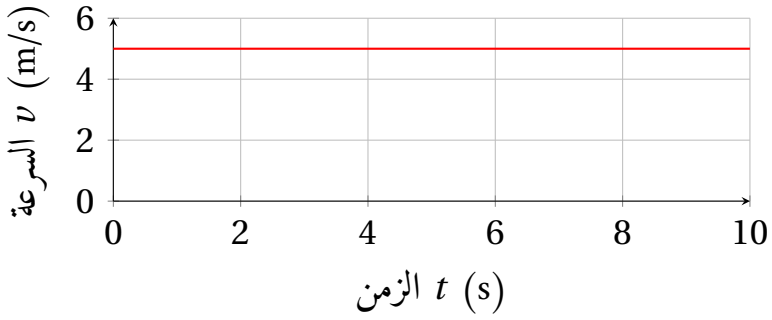
$$x(t) = 5t + 2$$
$$v(t) = 5$$
$$a(t) = 0$$

3.13.3 التمثيل البياني للحركة المستقيمة المنتظمة

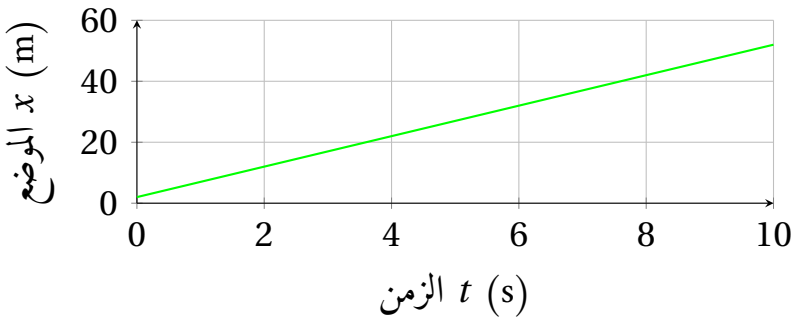
مخطط التسارع-الزمن:



مخطط السرعة-الزمن:



مخطط الموضع-الزمن:



4.13.3 تحليل المخططات

من مخطط التسارع-الزمن:

- الخط الأفقي عند $a = 0$ يؤكد أن الحركة منتظمة
- المساحة تحت المنحنى = التغير في السرعة = 0

من مخطط السرعة-الزمن:

- الخط الأفقي عند $v = 5\,\mathrm{m/s}$ يدل على سرعة ثابتة
- المساحة تحت المنحنى = المسافة المقطوعة
- المساحة = $t \times 5 = x_0 - x(t)$

من مخطط الموضع-الزمن:

- الخط المائل يدل على حركة بسرعة ثابتة
- ميل الخط = السرعة = $\frac{dx}{dt} = 5\,\mathrm{m/s}$
- تقاطع الخط مع محور y = الموضع الابتدائي $x_0 = 2\,\mathrm{m}$

5.13.3 العلاقات بين المخططات

المخطط	الميل	المساحة تحت المنحنى
الموضع-الزمن	السرعة	لا معنى فيزيائي
السرعة-الزمن	التسارع	الإزاحة
التسارع-الزمن	تغير التسارع	التغير في السرعة

مثال 17

6.13.3 مثال تطبيقي

المعطيات:

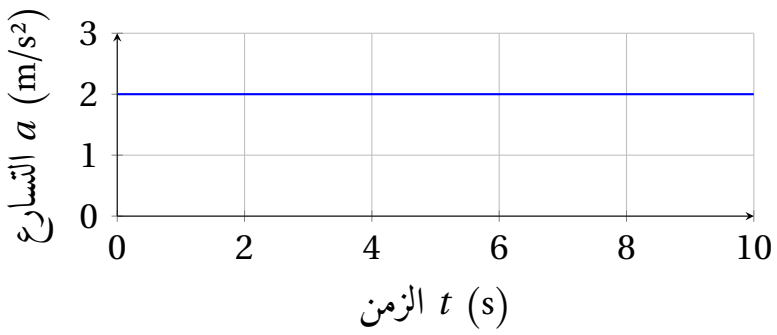
- التسارع: $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$
- السرعة الابتدائية: $V_0 = 5\,\mathrm{m/s}$
- الموضع الابتدائي: $x_0 = 10\,\mathrm{m}$
- $t_0 = 0$

المعادلات:

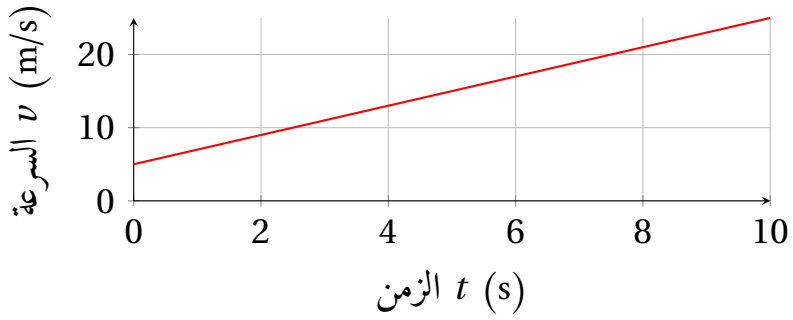
$$x(t) = \frac{1}{2}(2)\,t^2 + 5t + 10 = t^2 + 5t + 10$$
$$V(t) = 2t + 5$$
$$a(t) = 2$$

التمثيل البياني للحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

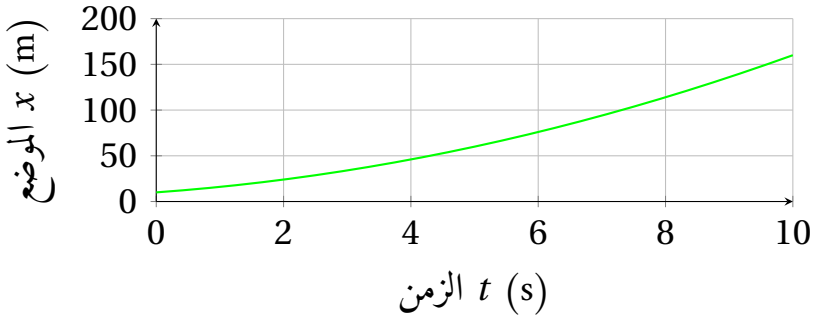
مخطط التسارع-الزمن:



مخطط السرعة-الزمن:



مخطط الموضع-الزمن:



تحليل المخططات

من مخطط التسارع-الزمن:

- الخط الأفقي يؤكد أن التسارع ثابت
- المساحة تحت المنحنى = التغير في السرعة

من مخطط السرعة-الزمن:

- الخط المائل يدل على سرعة متغيرة خطياً
- الميل = التسارع = $2\,\mathrm{m/s^2}$
- المساحة تحت المنحنى = الإزاحة

من مخطط الموضع-الزمن:

- المنحنى التربيعي يدل على حركة متسارعة
- الميل اللحظي = السرعة اللحظية

14.3 الحركة المستقيمة متغيرة التسارع

1.14.3 العلاقة بين السرعة والموضع دون الزمن

إثبات العلاقة $V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = a \cdot \frac{dx}{dV}$$
$$V\,dV = a\,dx$$
$$\int_{V_0}^{V} V\,dV = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$
$$\left[\frac{1}{2}V^2\right]_{V_0}^{V} = a(x - x_0)$$
$$\frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = a(x - x_0)$$
$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

2.14.3 الحركة المستقيمة متغيرة التسارع

التعريف:

تكون الحركة مستقيمة متغيرة التسارع إذا كان:

- المسار مستقيمًا
- التسارع غير ثابت $(a = f(t))$

3.14.3 مثال تطبيقي

المعطيات:

- التسارع: $a = t - 3$
- الزمن الابتدائي: $t_0 = 0\,\text{s}$
- الفاصلة الابتدائية: x_0
- السرعة الابتدائية: V_0
- عند $t = 2\,\text{s}$: $V = 2\,\text{m/s}$,$x = 3\,\text{m}$

المطلوب:

أوجد عبارتي السرعة والفاصلة بدلالة الزمن.

الحل:

1. إيجاد السرعة:

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0=0}^{t} a\,dt = \int_{0}^{t} (t-3)\,dt$$
$$[V]_{V_0}^{V} = \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t\right]_0^t$$
$$V - V_0 = \frac{1}{2}t^2 - 3t$$
$$V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0$$

2. إيجاد الفاصلة:

$$\frac{dx(t)}{dt} = V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0\right) dt$$
$$x - x_0 = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + V_0 t\right]_0^t$$
$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + V_0 t + x_0$$

3. تحديد الثوابت V_0 و x_0:

من شرط السرعة عند $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$V(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + V_0 = 2$$
$$2 - 6 + V_0 = 2$$
$$V_0 = 6\,\mathrm{m/s}$$

من شرط الموضع عند $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$x(2) = \frac{1}{6}(2)^3 - \frac{3}{2}(2)^2 + 6(2) + x_0 = 3$$

$$\frac{8}{6} - 6 + 12 + x_0 = 3$$

$$\frac{4}{3} + 6 + x_0 = 3$$

$$x_0 = 3 - 6 - \frac{4}{3} = -\frac{13}{3}\,\mathrm{m}$$

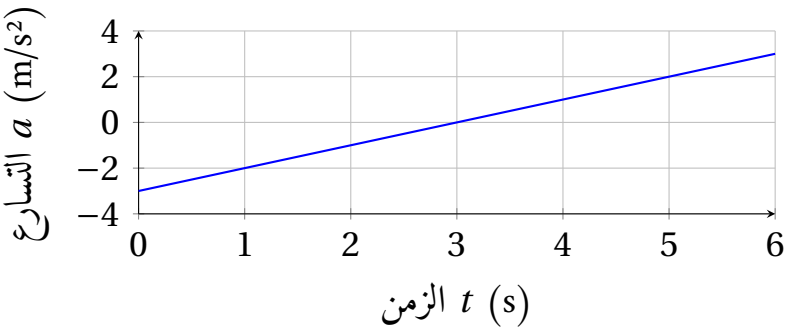
4. المعادلات النهائية:

$$V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6$$

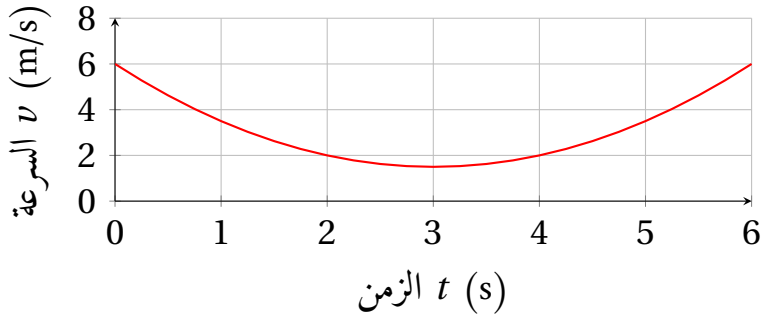
$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t - \frac{13}{3}$$

4.14.3 التمثيل البياني

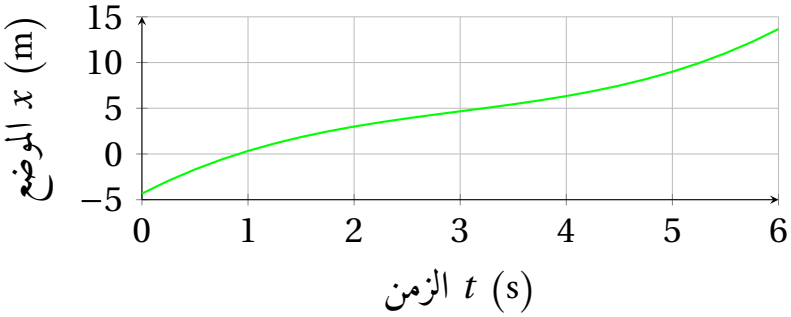
مخطط التسارع-الزمن:



مخطط السرعة-الزمن:



مخطط الموضع-الزمن:



نقاط هامة:

- عند $t = 0$: $x = -\frac{13}{3}\,\text{m}$,$V = 6\,\text{m/s}$,$a = -3\,\text{m/s}^2$
- عند $t = 2\,\text{s}$: $x = 3\,\text{m}$,$V = 2\,\text{m/s}$,$a = -1\,\text{m/s}^2$
- عند $t = 3\,\text{s}$: $x = 2.5\,\text{m}$,$V = 1.5\,\text{m/s}$,$a = 0$

5.14.3 تحديد الثوابت من الشروط الابتدائية

المعادلات العامة:

$$V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0$$
$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + V_0 t + x_0$$

تحديد V_0 من شرط السرعة:

$$V(t = 2s) = 2\,\text{m/s}$$
$$\frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + V_0 = 2$$
$$2 - 6 + V_0 = 2$$
$$V_0 = 6\,\text{m/s}$$

تحديد x_0 من شرط الموضع:

$$x(t=2s)=3\,\mathrm{m}$$
$$\frac{1}{6}(2)^3-\frac{3}{2}(2)^2+6(2)+x_0=3$$
$$\frac{8}{6}-6+12+x_0=3$$
$$\frac{4}{3}+6+x_0=3$$
$$x_0=3-6-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3}\,\mathrm{m}$$

6.14.3 المعادلات الزمنية النهائية

السرعة:

$$V(t)=\frac{1}{2}t^2-3t+6$$

الموضع:

$$x(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t^2+6t-\frac{13}{3}$$

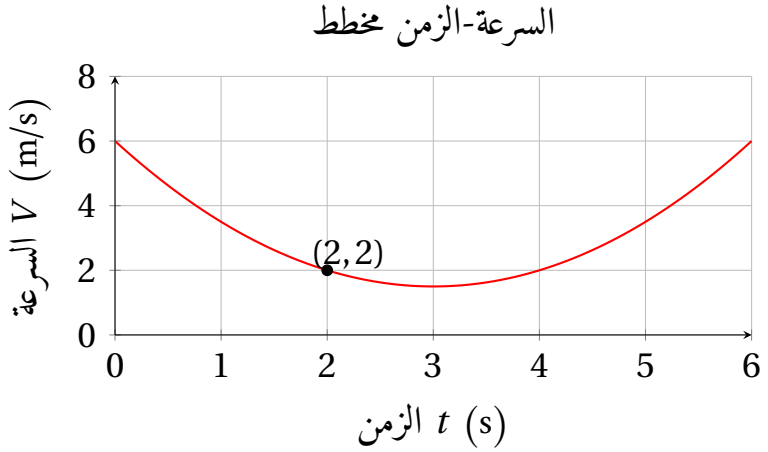
7.14.3 التحقق من الحل

عند $t=2s$:

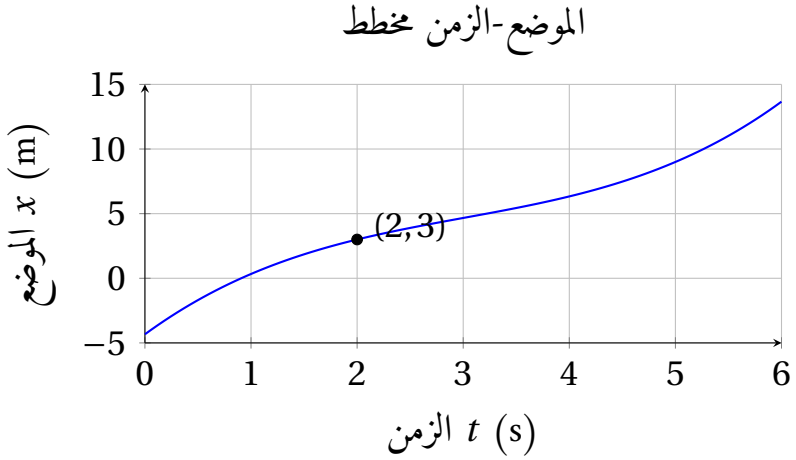
$$V(2)=\frac{1}{2}(4)-6+6=2-6+6=2\,\mathrm{m/s}$$
$$x(2)=\frac{1}{6}(8)-\frac{3}{2}(4)+12-\frac{13}{3}=\frac{4}{3}-6+12-\frac{13}{3}=6-\frac{9}{3}=6-3=3\,\mathrm{m}$$

8.14.3 التمثيل البياني للمعادلات النهائية

مخطط السرعة-الزمن:



مخطط الموضع-الزمن:



9.14.3 الحركة المستقيمة الجيبية

التعريف:

الحركة المستقيمة الجيبية هي حالة خاصة من الحركات المستقيمة متغيرة التسارع، حيث يتغير التسارع بشكل جيبي مع الزمن.

المعادلات العامة للحركة الجيبية:

$$a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$V(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi) + C$$
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + Ct + D$$

خصائص الحركة الجيبية:

- التسارع يتناسب عكسياً مع الإزاحة
- الحركة دورية (تتكرر كل فترة زمنية ثابتة)
- الطاقة تتبادل بين طاقة الحركة وطاقة الوضع

10.14.3 مقارنة بين أنواع الحركة المستقيمة

نوع الحركة	التسارع	السرعة	الموضع
المنتظمة	$a = 0$	$V =$ ثابت	$x = Vt + x_0$
المتغيرة بانتظام	$a =$ ثابت	$V = at + V_0$	$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$
الجيبية	$a = -\omega^2 x$	$V = \omega A\cos(\omega t)$	$x = A\sin(\omega t)$
العامة	$a = f(t)$	$V = \int a\,dt$	$x = \int V\,dt$

جدول 1.3: مقارنة بين أنواع الحركة المستقيمة

11.14.3 التحليل الفيزيائي للحركة في المثال

نقاط هامة في الحركة:

- عند $t = 0$: $x = -\frac{13}{3}\,\text{m}$,$V = 6\,\text{m/s}$
- عند $t = 2\,\text{s}$: $x = 3\,\text{m}$,$V = 2\,\text{m/s}$
- السرعة الدنيا عند $t = 3\,\text{s}$: $V = 1.5\,\text{m/s}$
- يتغير اتجاه التسارع عند $t = 3\,\text{s}$

15.3 الحركة المنحنية في المستوي

1.15.3 مقدمة

إذا كان المسار منحنياً، تسمى الحركة منحنية. لدراسة هذه الحركة يمكن استعمال الإحداثيات الديكارتية، لكن يُستحسن استعمال نوع خاص من الإحداثيات تسمى بالإحداثيات الذاتية (Coordinates Intrinsic)، وهي عبارة عن جملة من الإحداثيات مرفقة بقاعدة متعامدة متجانسة $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$. تسمى بقاعدة فريني (frame Frenet–Serret).

قاعدة فريني

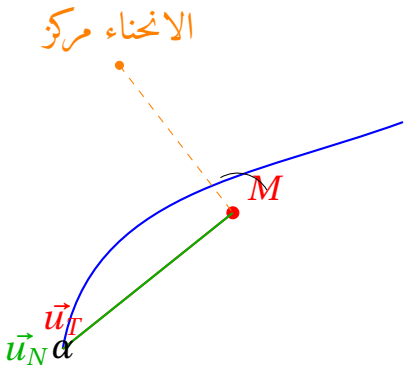
شعاع الوحدة المماسي $\vec{u}_T$:

- يكون مماسياً للمسار
- اتجاهه في اتجاه شعاع السرعة (اتجاه الحركة)
- مقداره ثابت ويساوي 1

شعاع الوحدة الناظمي $\vec{u}_N$:

- يكون عمودياً على شعاع الوحدة المماسي
- اتجاهه دوماً نحو تقعر المسار
- مقداره ثابت ويساوي 1

التمثيل الهندسي



2.15.3 السرعة في الإحداثيات الذاتية

السرعة المتوسطة:

إذا قطعت النقطة M القوس $\Delta S = \overrightarrow{MM'}$ خلال المدة Δt، فإن السرعة المتوسطة هي:

$$V_{moy} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

السرعة اللحظية:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$
$$\vec{V} = V\vec{u}_T = \frac{dS}{dt}\vec{u}_T$$

3.15.3 التعبير عن شعاعي الوحدة

شعاع الوحدة المماسي:

$$\vec{u}_T = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

شعاع الوحدة الناظمي:

$$\vec{u}_N = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$$

4.15.3 شعاع التسارع في الإحداثيات الذاتية

اشتقاق التسارع:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{u}_T)$$
$$= \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

ملاحظة هامة:

شعاع الوحدة $\vec{u}_T$ هو شعاع ثابت في الشدة (مقداره دائماً 1)، لكنه متغير في الاتجاه على المنحنى.

حساب $\frac{d\vec{u_T}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \frac{d\vec{u_T}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$
$$\frac{d\vec{u_T}}{d\alpha} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} = \vec{u_N}$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{1}{R} \cdot V$$

حيث R هو نصف قطر الانحناء.

الناتج النهائي:

$$\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \frac{V}{R}\vec{u_N}$$

5.15.3 التسارع في قاعدة فريني

عبارة التسارع الكاملة:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u_T} + \frac{V^2}{R}\vec{u_N}$$

مركبات التسارع:

- **التسارع المماسي:** $a_T = \frac{dV}{dt}$
- **التسارع الناظمي:** $a_N = \frac{V^2}{R}$

شدة التسارع:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}$$

6.15.3 حالات خاصة

الحركة الدائرية المنتظمة:

- $\frac{dV}{dt} = 0$ (سرعة ثابتة)

- $\vec{a} = \frac{V^2}{R}\vec{u}_N$ (تسارع مركزي فقط)

الحركة المستقيمة:

- $R \to \infty$ (نصف قطر انحناء لا نهائي)
- $a_N = 0$ (لا يوجد تسارع ناظمي)
- $\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T$ (تسارع مماسي فقط)

16.3 اشتقاق التسارع في الإحداثيات الذاتية

1.16.3 اشتقاق تغير شعاع الوحدة المماسي مع الزمن

بما أن $\vec{u}_T$ تابع للمتغير α وهذا الأخير تابع للزمن t، فإننا بصدد اشتقاق دالة مركبة:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

2.16.3 حساب المشتقات

المشتقة الأولى:

$$\frac{d\vec{u}_T}{d\alpha} = -\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j} = \vec{u}_N$$

المشتقة الثانية:

$$dS = r\,d\alpha \Rightarrow V = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{V}{r}$$

النتيجة النهائية:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{V}{r}\vec{u}_N$$

3.16.3 شعاع التسارع الكامل

عبارة التسارع:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{r}\vec{u}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

مركبات التسارع:

- **التسارع المماسي:** $a_T = \frac{dV}{dt}$
- **التسارع الناظمي:** $a_N = \frac{V^2}{r}$

4.16.3 الرمزية في الترميز

ملاحظة هامة:

كما رأينا أننا نرمز لشعاع التسارع بالرمز $\vec{a}$، كذلك يمكن أن نرمز له بالرمز $\vec{\gamma}$، وهو رمز شائع في معظم الكتب. لذلك من هنا فصاعداً سوف نرمز له بهذا الرمز.
هذا لا يعني أن الرمز $\vec{a}$ خطأ، بل كلاهما صحيح ومستخدم.

5.16.3 الكتابة بالرمز الجديد

عبارة التسارع:

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$$

مركبات التسارع:

- **التسارع المماسي:** $\gamma_T = \frac{dV}{dt}$
- **التسارع الناظمي:** $\gamma_N = \frac{V^2}{r}$

شدة التسارع:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_T^2 + \gamma_N^2} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

6.16.3 حالة خاصة: الحركة الدائرية المنتظمة

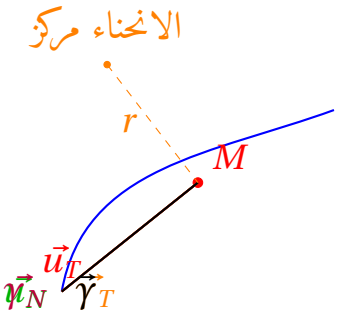
الخصائص:

$$\gamma_T = 0 \Leftrightarrow \|\vec{V}\| = V = C^{te}$$
$$\vec{\gamma} = \gamma_N \vec{u}_N$$

التفسير الفيزيائي:

- في الحركة الدائرية المنتظمة، السرعة ثابتة في المقدار
- لذلك يكون التسارع المماسي معدومًا $\gamma_T = 0$
- يبقى التسارع الناظمي فقط $\gamma_N = \frac{V^2}{r}$
- هذا التسارع يتجه نحو مركز الدائرة

7.16.3 التمثيل البياني



8.16.3 ملخص العلاقات الأساسية

الكمية	الرمز	العبارة الرياضية
شعاع السرعة	$\vec{V}$	$V\vec{u}_T$
التسارع المماسي	γ_T	$\frac{dV}{dt}$
التسارع الناظمي	γ_N	$\frac{V^2}{r}$
شعاع التسارع	$\vec{\gamma}$	$\gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$
شدة التسارع	γ	$\sqrt{\gamma_T^2 + \gamma_N^2}$

جدول 2.3: العلاقات الأساسية في الإحداثيات الذاتية

باب 4

تمارين الفصل الحركيات مع الحلول

1.4 التمرين 1: الحركة المستقيمة المتغيرة

تتحرك سيارة M من السكون على طريق مستقيم وفق المحور Ox في معلم ديكارتي، وتنقسم حركتها إلى مرحلتين:

- تتحرك بتسارع $5\,\mathrm{m/s^2}$ لمدة $10\,\mathrm{s}$.
- ثم تتباطأ بتسارع $-10\,\mathrm{m/s^2}$ حتى تتوقف بعد $5\,\mathrm{s}$.

المطلوب:
أوجد المسافة الكلية التي قطعتها السيارة.

2.4 التمرين 2: طبيعة الحركة

يتحرك جسم نقطي M على المحور Ox بتسارع $\vec{a} = -k\vec{V}$، حيث k ثابت موجب و $\vec{V}$ شعاع السرعة اللحظية. السرعة الابتدائية عند النقطة O هي $V(0) = V_0$.

المطلوب:

1. أوجد عبارتي السرعة $V(t)$ والفاصلة $x(t)$ ومثلهما بيانيًا.
2. ما طبيعة الحركة؟
3. أوجد الزمن t الذي يتوقف عنده المتحرك M، ثم استنتج المسافة $x(t)$.

3.4 التمرين 3: الحركة المتسارعة

يحاول شخص اللحاق بقطار متوقف ، بسرعة $V = 6\,\mathrm{m/s}$. عندما تصبح المسافة بينهما $L = 30\,\mathrm{m}$، يعطى القطار إشارة الانطلاق، فينطلق بتسارع $\gamma = 1\,\mathrm{m/s^2}$.

المطلوب:
أوجد أصغر مسافة بين الشخص والقطار.

4.4 التمرين 4: الحركة في مستوي

تعطى معادلات الحركة لمتحرك M في المستوي (x, y) كما يلي:

$$x(\theta) = 5\cos\theta, \quad y(\theta) = 3\sin\theta$$

حيث θ مرتبطة بالزمن t بالعلاقة:

$$t = 5\theta - 4\sin\theta$$

المطلوب:

1. أوجد معادلة المسار وخصائصه.
2. أوجد عبارتي شعاع السرعة $\vec{V}$ والتسارع $\vec{a}$.

5.4 التمرين 5: الحركة في معلم ذاتي

تعطى الفاصلة المنحنية لنقطة مادية M تتحرك على مسار دائري مركزه O بالعلاقة:

$$s(t) = t^3 + 2t^2$$

إذا كانت عند اللحظة $t = 2\,\mathrm{s}$ طويلة شعاع التسارع $\|\vec{a}\| = 16\sqrt{2}\,\mathrm{m/s^2}$.
المطلوب:
أوجد عبارة مركبة التسارع المماسية γ_t ثم قيمة نصف قطر الانحناء r، مستنتجاً بذلك عبارة مركبة التسارع الناظمية γ_N.

6.4 التمرين 1: الحركة المستقيمة المتغيرة

المعطيات:

- المرحلة الأولى: التسارع $a_1 = 2\,\text{m/s}^2$، المدة $t_1 = 10\,\text{s}$
- المرحلة الثانية: التسارع $a_2 = -4\,\text{m/s}^2$، المدة $t_2 = 5\,\text{s}$

1.6.4 الحل:

المرحلة الأولى:

$$v_1 = a_1 t_1 = 2 \times 10 = 20\,\text{m/s}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100\,\text{m}$$

المرحلة الثانية:

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = 20 + (-4) \times 5 = 0\,\text{m/s}$$

$$x_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 20 \times 5 + \frac{1}{2} \times (-4) \times 5^2 = 100 - 50 = 50\,\text{m}$$

المسافة الكلية:

$$x_{\text{total}} = x_1 + x_2 = 100 + 50 = 150\,\text{m}$$

التمرين 2: الحركة بتسارع متناسب مع السرعة

المعطيات:

$$a = -kv, \quad v(0) = v_0$$

الحل:

1. إيجاد السرعة والإزاحة:

$$\frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$$

لإيجاد الإزاحة:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \Rightarrow x(t) = \int v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C$$

باستخدام الشرط الابتدائي $x(0) = 0$:

$$0 = -\frac{v_0}{k} + C \Rightarrow C = \frac{v_0}{k}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

2. طبيعة الحركة: حركة تباطؤية أسية، حيث تتناقص السرعة بشكل أسي مع الزمن.

3. زمن التوقف والمسافة:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0 \Rightarrow \text{لا يتوقف تماماً إلا عند } t \to \infty$$

$$x_{\max} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0}{k}$$

التمرين 3: اللحاق بالقطار

المعطيات:

- سرعة الشخص: $v_p = 6\,\text{m/s}$
- المسافة الابتدائية: $L = 30\,\text{m}$
- تسارع القطار: $a_t = 1\,\text{m/s}^2$

الحل:

معادلات الحركة:

$$x_p(t) = v_p t$$
$$x_t(t) = \frac{1}{2} a_t t^2 + L$$

المسافة بينهما:

$$d(t) = x_t(t) - x_p(t) = \frac{1}{2} t^2 + 30 - 6t$$

أصغر مسافة:

$$\frac{dd}{dt} = t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6\,\text{s}$$

$$d_{\min} = \frac{1}{2} \times 6^2 + 30 - 6 \times 6 = 18 + 30 - 36 = 12\,\text{m}$$

التمرين 4: الحركة في مستوى

المعطيات:

$$x(\theta) = 5\cos\theta, \quad y(\theta) = 3\sin\theta, \quad t = 5\theta - 4\sin\theta$$

الحل:

1. معادلة المسار:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

مسار قطع ناقص نصف محوره $a = 5$ و $b = 3$.

2. السرعة والتسارع:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5 - 4\cos\theta}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -5\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad v_y = 3\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = -5\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + 3\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -5\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 5\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_y = -3\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 3\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

التمرين 5: الحركة في معلم ذاتي

المعطيات:

$$s(t) = t^3 + 2t^2, \quad \|\vec{a}\| = 16\sqrt{2}\,\text{m/s}^2 \text{ عند } t = 2\,\text{s}$$

الحل:

السرعة المماسية:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$$

التسارع المماسي:

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

عند $t = 2\,\text{s}$:

$$\gamma_t = 6 \times 2 + 4 = 16\,\text{m/s}^2$$

نصف قطر الانحناء:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_N^2} = 16\sqrt{2}$$

$$\gamma_N^2 = (16\sqrt{2})^2 - 16^2 = 512 - 256 = 256$$

$$\gamma_N = 16\,\text{m/s}^2$$

$$\gamma_N = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{\gamma_N}$$

عند $t = 2\,\text{s}$:

$$v = 3 \times 4 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20\,\text{m/s}$$

$$r = \frac{20^2}{16} = \frac{400}{16} = 25\,\text{m}$$

التسارع الناظمي:

$$\gamma_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(3t^2 + 4t)^2}{25}$$

حل التمرين رقم 5 من السلسلة الاولى

التمرين 05: الجداء الشعاعي المضاعف

المعطيات

لتكن الأشعة الثلاثة $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ المنسوبة للمعلم المتعامد المتجانس ذو القاعدة المتعامدة.

المطلوب

1. حساب مركبات الجداء الشعاعي المضاعف $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$
2. استنتاج العلاقة التالية:

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

الحل المفصل

الخطوة 1: تمثيل الأشعة في المعلم المتعامد

لنفرض أن الأشعة معطاة في معلم متعامد متجانس بالقاعدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{V}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

الخطوة 2: حساب $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$

$$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - z_2y_3)\vec{i} + (z_2x_3 - x_2z_3)\vec{j} + (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{k}$$

لتبسيط الكتابة، لنرمز للمركبات كالتالي:

$$\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}$$

حيث:

$$W_x = y_2z_3 - z_2y_3, \quad W_y = z_2x_3 - x_2z_3, \quad W_z = x_2y_3 - y_2x_3$$

الخطوة 3: حساب $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})$

$$\vec{V_1} \wedge \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 W_z - z_1 W_y)\vec{i} + (z_1 W_x - x_1 W_z)\vec{j} + (x_1 W_y - y_1 W_x)\vec{k}$$

الخطوة 4: التعويض بقيم W_x, W_y, W_z

المركبة x**:**

$$\begin{aligned} y_1 W_z - z_1 W_y &= y_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) - z_1(z_2 x_3 - x_2 z_3) \\ &= x_2 y_1 y_3 - y_1 y_2 x_3 - z_1 z_2 x_3 + x_2 z_1 z_3 \\ &= x_2(y_1 y_3 + z_1 z_3) - x_3(y_1 y_2 + z_1 z_2) \end{aligned}$$

المركبة y**:**

$$\begin{aligned} z_1 W_x - x_1 W_z &= z_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - x_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) \\ &= y_2 z_1 z_3 - z_1 z_2 y_3 - x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 \\ &= y_2(x_1 x_3 + z_1 z_3) - y_3(x_1 x_2 + z_1 z_2) \end{aligned}$$

المركبة z**:**

$$\begin{aligned} x_1 W_y - y_1 W_x &= x_1(z_2 x_3 - x_2 z_3) - y_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) \\ &= x_1 z_2 x_3 - x_1 x_2 z_3 - y_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 y_3 \\ &= z_2(x_1 x_3 + y_1 y_3) - z_3(x_1 x_2 + y_1 y_2) \end{aligned}$$

الخطوة 5: إعادة كتابة الناتج بشكل متجهي

لاحظ أن:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_3} = x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3$$
$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

إذن يمكن كتابة الناتج كالتالي:

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{pmatrix} x_2(\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}) - x_3(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) \\ y_2(\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}) - y_3(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) \\ z_2(\vec{V_1} \cdot \vec{V_3}) - z_3(\vec{V_1} \cdot \vec{V_2}) \end{pmatrix}$$

الخطوة 6: الصيغة النهائية

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$$

النتيجة النهائية

$$\boxed{\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3}$$

باب 5

تحريك النقطة المادية

1.0.5 مقدمة:

تطرقنا في الفصل السابق إلى دراسة **حركة النقطة المادية** من حيث أوصافها الهندسية والزمنية، بينما نتناول في هذا الفصل جانبًا آخر من نفس الظاهرة، وهو **أسباب ومسببات الحركة** المتمثلة في القوى المؤثرة على الجسم. يعرف هذا المجال من الميكانيك بـ **التحريك (الديناميك)**، ويُعنى بدراسة العلاقة بين **القوى والحركة**.

علم التحريك (Dynamic) + علم الحركة (Kinematic) = علم الميكانيك

Dynamics + Kinematics = Mechanics

تعريف 1

2.0.5 مفهوم القوة: (Concept of force)

إن أي حركة لجسم ما هي نتيجة لتأثيرات الأجسام المحيطة به. فعندما يتأثر جسم بآخر، قد تتغير حالته الحركية أو اتجاهه أو سرعته، ويُطلق على هذا التأثير فيزيائيًا اسم **القوة (Force)**.

القوة هي **كمية فيزيائية متجهة** تمثل التأثير الذي يمارسه جسم ما A على جسم آخر B، فتؤدي إلى تغيير في حالته الحركية أو تشوهه.

القوة هي كل مقدار فيزيائي شعاعي يؤدي إلى تغيير في حركة الجسم أو شكله.

تصنيف القوى: يمكن تصنيف القوى إلى نوعين رئيسيين:

- **قوى تلامسية (Contact forces):** وهي القوى التي تنشأ نتيجة لتأثير جسمين متلامسين، كقوة الاحتكاك، قوة الشد، أو قوة رد الفعل.
- **قوى عن بُعد (Remote forces):** وهي القوى التي تظهر دون تماس مباشر بين الأجسام، مثل قوة الجاذبية، القوة الكهربائية، والقوة المغناطيسية.

القوى التلامسية: تنتج عن تأثير مباشر بين جسمين عبر السطح الفاصل بينهما، وقد تكون عمودية (رد فعل السطح) أو موازية (احتكاك).

أولاً: القوى التلامسية (Contact Forces)

هي القوى التي تنتج عن تأثير جسم على آخر عن طريق اللمس المباشر، وتظهر فقط عندما يكون هناك تماس فعلي بين السطحين.

أمثلة:

1. **قوة الاحتكاك (Friction Force):** وهي القوة التي تظهر عندما يتحرك أحد الجسمين بالنسبة للآخر، وتعاكس دائمًا اتجاه الحركة النسبية بين السطحين المتلامسين.
2. **قوة الشد أو التوتر (Tension Force):** وهي القوة الناتجة عن تأثير خيط أو نابض مشدود على جسم متصل به.

ثانياً: القوى البعيدة (Action-at-a-Distance Forces)

هي القوى التي تؤثر على جسم من دون ملامسة مباشرة، وسببها وجود **حقل (Field)** في الفضاء يولد تأثيراً شعاعياً بين الأجسام. من أمثلة هذه الحقول: الحقل الثقالي (Gravitational Field)، الحقل الكهربائي (Electric Field)، والحقل المغناطيسي (Magnetic Field).

أمثلة:

1. **قوة الجاذبية (Gravitational Force):** هي القوة الناتجة عن تأثير كتلة على أخرى. فعلى سبيل المثال، تؤثر كتلة الأرض بقوة جذب على جميع الأجسام الموجودة في جوارها، وتعرف هذه القوة على سطح الأرض باسم **قوة الثقل (Weight Force)** ويرمز لها عادة بـ $\vec{P}$.

2. **القوة الكهربائية (Electric Force):** هي القوة الناتجة عن التفاعل بين شحنتين كهربائيتين، وقد تكون **جاذبة (Attractive)** إذا كانت الشحنتان مختلفتين، أو **تنافرية (Repulsive)** إذا كانتا من نفس النوع.

3. **القوة المغناطيسية (Magnetic Force):** هي القوة الناتجة عن التفاعل بين المغانط أو بين المغانط والمعادن، مثل تأثير المغناطيس على الحديد (Fe).

1.5 تمثيل القوة بشعاع (Representation of Force Vector)

القوة هي كمية فيزيائية **شعاعية (Quantity Vector)**، أي أنها تُعرّف بأربعة عناصر أساسية يجب تحديدها بشكل كامل لتمثيلها تمثيلاً صحيحًا.

عناصر القوة:

1. **نقطة التأثير (Point of Application):** هي النقطة على الجسم التي تُؤثّر فيها القوة مباشرة. فعلى سبيل المثال، تؤثر قوة الشد على النقطة التي يُربط فيها الخيط بالجسم.

2. **الاتجاه (Direction):** هو الخط الذي تعمل عليه القوة في الفضاء، ويُعرف أيضًا باسم **حامل القوة (Line of Action)**. يحدد هذا الاتجاه علاقة القوة بمحاور الإحداثيات أو بغيرها من القوى.

3. **الحاسة أو المنحى (Sense):** هو الجهة التي تعمل فيها القوة على طول خط عملها، أي من النقطة A نحو B أو بالعكس. فمثلاً، قوة الجاذبية يكون منحاها نحو مركز الأرض.

4. **الشدة (Magnitude):** وهي القيمة العددية للقوة وتُقاس بوحدة **النيوتن (N)** في النظام الدولي للوحدات (SI). وتمثل مقدار تأثير القوة على الجسم.

تمثيل القوة رياضياً:
نرمز إلى القوة التي يؤثر بها جسم A على جسم B بالرمز:

$$\vec{F}_{A/B}$$

حيث يشير السهم فوق الرمز إلى أن القوة كمية شعاعية.

ويمكن تمثيل القوة في معلم ديكارتي ثلاثي الأبعاد كما يلي:

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$$

بحيث تمثل F_x, F_y, F_z إسقاطات القوة على المحاور الثلاثة x, y, z.

شدة القوة: تحسب من مركباتها وفق العلاقة:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

ملاحظات 1

ملاحظة: في كثير من الحالات الدراسية البسيطة، ندرس القوى في المستوى فقط، فيكون التمثيل ثنائي الأبعاد بالشكل:

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j}$$

2.5 مبدأ العطالة

(Law First Newton's , 1727-1642)

تعريف 1

1.2.5 نص المبدأ:

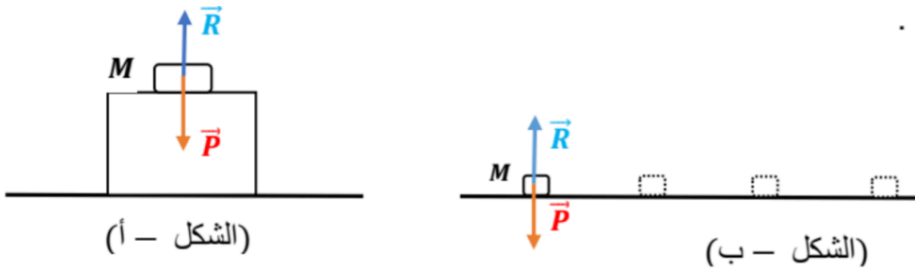
إذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة على جسمٍ ما M منعدمة، فإن هذا الجسم:

- يبقى في حالة سكون إذا كان ساكنًا أصلاً،
- أو يستمر في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان متحركًا من قبل.

بصيغة أخرى: **يبقى الجسم ساكنًا أو في حركة مستقيمة منتظمة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية.**

ملاحظات 2

ملاحظة: الجسم الذي لا تؤثر عليه قوى خارجية يُقال عنه أنه في حالة **عطالة (Inertia).**



شكل 1.5: الشكل (أ): جسم ساكن على سطح.
الشكل (ب): جسم متحرك حركة مستقيمة منتظمة

2.2.5 تعليقات وتوضيحات:

1. **النظام الميكانيكي :** هو جسم أو مجموعة أجسام نختارها لدراسة تأثير القوى عليها.
2. **القوى الداخلية والخارجية:** إذا أثّر جسم من خارج النظام على جسم داخل النظام، فإن القوة تُعدّ **خارجية.** أما إذا كان التأثير بين مكونات النظام نفسه، فتُعدّ **داخلية.**
3. في المثالين السابقين: - إذا اعتبرنا الجسم M فقط كنظام، فإن القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ هما قوتان **خارجيتان.** - أما إذا اعتبرنا النظام مكوَّنًا من الجسم M والطاولة معًا، فإن قوة رد الفعل $\vec{R}$ تصبح **داخلية** لأنها بين مكونات النظام، بينما تبقى $\vec{P}$ (قوة الثقل) قوة **خارجية.**

خلاصة: مبدأ العطالة يحدد الحالة الحركية للجسم عندما تكون محصلة القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{الحركة مستقيمة منتظمة أو سكون تام.}$$

3.5 4- المرجع العطالي أو الغاليلي (Galilean Reference Frame)

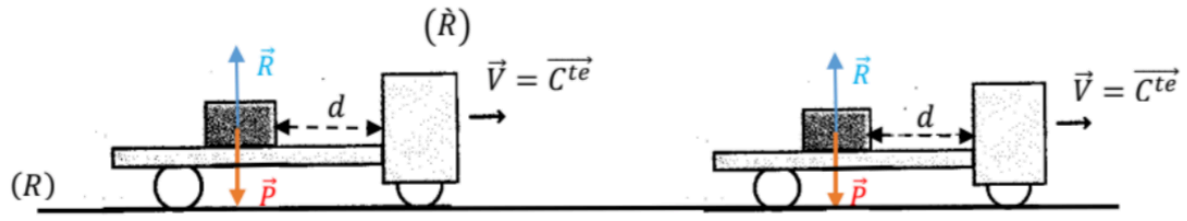
تعريف 1

يُعد مفهوم **المرجع العطالي (Inertial) Reference Frame** من أهم المفاهيم الأساسية في الميكانيك. فهو المرجع الذي يتحقق فيه **مبدأ العطالة** ، أي أن أي جسم لا تؤثر عليه قوى خارجية (أو كانت محصلتها تساوي الصفر) يبقى في حالة سكون أو يستمر في الحركة بسرعة ثابتة وعلى خط مستقيم.

بتعبير آخر: إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم ما **منعدمة** بالنسبة إلى مرجع معين، فإن هذا الجسم يكون:

- ساكنًا إذا كان ساكنًا من قبل، أو
- في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان متحركًا.

أمثلة ومقارنة بين المراجع:



شكل 2.5:
الشكل (1): قطعة جليد فوق شاحنة تتحرك بسرعة ثابتة.

الشكل (1): قطعة جليد فوق شاحنة تتحرك بسرعة ثابتة.

التحليل الفيزيائي:

1. بالنسبة إلى **المرجع الأرضي** (R): الأرض تُعتبر في معظم التجارب اليومية مرجعًا عطاليًا تقريبيًا، لأن تأثير دورانها حول محورها وحول الشمس ضعيف جدًا مقارنة بالحركات التي ندرسها. بما أن الشاحنة تتحرك بسرعة ثابتة في خط مستقيم، فإن تسارعها منعدم. وبالتالي، فإن محصلة القوى عليها (وكذلك على الجليد فوقها) منعدمة. إذن تتحقق شروط العطالة في هذا المرجع الأرضي.
2. بالنسبة إلى **مرجع الشاحنة** (R'): إذا كانت الشاحنة تسير بسرعة ثابتة، فإن هذا المرجع يُعتبر أيضًا عطاليًا بالنسبة للأرض، لأن حركته منتظمة ولا تحتوي على تسارع. في هذا المرجع، تبدو قطعة الجليد **ساكنة** تمامًا، رغم أنها في الحقيقة تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة إلى الأرض. القوى المؤثرة عليها (الثقل $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{R}$) متزنة، وبالتالي لا يوجد تسارع. إذن مبدأ العطالة متحقق أيضًا في هذا المرجع.

ملاحظات 3

ملاحظات توضيحية:

- المرجع الأرضي يُعد عطاليًا في الفيزياء الكلاسيكية، لكنه ليس عطاليًا بدقة في المقاييس الفلكية (بسبب دوران الأرض وتسارعها حول الشمس). ومع ذلك، نهمله في الدراسات الميكانيكية العادية.
- المراجع التي تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة إلى مرجع عطالي تعتبر أيضًا مراجع

عطالية. أما إذا تحرك المرجع بحركة متسارعة، فلا يكون عطاليًا.

- في المرجع غير العطالي (مثل سيارة تتسارع أو تتوقف فجأة)، تظهر قوى **وهمية (Forces Fictitious)** مثل قوة العطالة، التي نحس بها كدفع للخلف عند تسارع السيارة للأمام.

خلاصة: كل مرجع يتحقق فيه مبدأ العطالة يسمى **مرجعًا غاليليًا (Galilean Frame)**، وفي هذا المرجع نكتب:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \text{الحركة مستقيمة منتظمة أو سكون تام.}$$

كما أن جميع المراجع التي تتحرك بالنسبة إلى بعضها البعض بحركة مستقيمة منتظمة تُعتبر مراجع عطالية مكافئة (Galilean Equivalence Principle).

ملاحظات 4

1.3.5 ملاحظات هامة وخاتمة حول المرجع الغاليلي:

نتيجة: كل مرجع ساكن فهو مرجع غاليلي، وكل مرجع يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة إلى مرجع غاليلي هو أيضًا مرجع غاليلي. بمعنى آخر، المراجع الغاليليّة تشكل عائلة من المراجع المتكافئة فيزيائيًا.

ملاحظة مهمة: في الواقع، الأرض ليست مرجعًا ساكنًا تمامًا، بل تدور حول محورها مرة كل 24 ساعة، كما تدور حول الشمس مرة كل سنة. إذن فهي تخضع لتسارعين:

- **تسارع مركزي نحو الشمس:** ناتج عن دوران الأرض حول الشمس، قيمته تقريبًا:

$$a_{\text{حول الشمس}} = 4.4 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2$$

- **تسارع مركزي نحو محور الدوران:** ناتج عن دورانها حول محورها، وتبلغ قيمته عند خط الاستواء تقريبًا:

$$a_{\text{حول المحور}} = 3.37 \times 10^{-2}\,\text{m/s}^2$$

لكن هذين التسارعين ضعيفان جدًا بالمقارنة مع تسارع الجاذبية الأرضية:

$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$$

لذلك نعتبر الأرض مرجعًا غاليليًا **تقريبيًا** في دراسة الحركات الاعتيادية على سطحها.

مفهوم الكتلة (Notion of Mass)

تعريف 2

حسب مبدأ العطالة، إذا أثرت قوة خارجية على جسم متحرك، فإنها تُحدث تغييرًا في حالته الحركية (أي في سرعته). لكن هذا التغيير يختلف من جسم إلى آخر. بعض الأجسام تتأثر بسرعة (تسارعها كبير)، وأجسام أخرى تحتاج قوة أكبر لإحداث نفس التغيير (تسارعها صغير). نسمي هذه الخاصية **عطالة الجسم (Inertia)**، أي مقاومته لتغيير حالته الحركية.

توضيح فيزيائي:

- الجسم الذي يمتلك عطالة كبيرة يحتاج إلى قوة أكبر لتغيير سرعته. مثال: من الصعب دفع سيارة مقارنة بدفع كرة.
- الجسم ذو العطالة الصغيرة (كالكرة) يتسارع بسهولة أكبر تحت نفس القوة.

تعريف 3

تعريف الكتلة :(Mass) نُعبّر عن العطالة بكمية فيزيائية مميزة نسميها **الكتلة (Mass)**، وترمز إلى مقدار مقاومة الجسم لتغيير حالته الحركية. وترمز لها بالحرف:

$$m$$

ووحدتها في النظام الدولي هي:

$$[\mathrm{m}] = \mathrm{kg}$$

ملاحظات 5

ملاحظات إضافية:

- الكتلة كمية **قياسية (Scalar)**، أي تُحدد بالمقدار فقط.
- الكتلة لا تتغير بتغير المكان (على الأرض أو في الفضاء).
- الكتلة ترتبط مباشرة بالعطالة: كلما زادت الكتلة زادت مقاومة الجسم لتسارعه.
- تختلف الكتلة عن الوزن :(Weight) الوزن هو قوة الجاذبية التي تؤثر على الجسم، بينما الكتلة خاصية داخلية ثابتة.

خلاصة: الكتلة تمثل **مقدار العطالة** للجسم، وتُعدّ من الثوابت الفيزيائية المميزة له، ويُعبَّر عنها في النظام الدولي بوحدة **الكيلوغرام (kg)**.

4.5 كمية الحركة (Impulse – Momentum Linear)

لدراسة الحالة الحركية لجسم مادي، لا يكفي أن نعرف سرعته فقط $\vec{V}$، بل يجب أيضًا معرفة كتلته m. ذلك لأن جسمين لهما نفس السرعة لا يمتلكان بالضرورة نفس التأثير الحركي (فجسم ثقيل يتحرك ببطء قد يكون تأثيره أكبر من جسم خفيف سريع).

لذلك نُعرّف مقدارًا فيزيائيًا يربط بين الكتلة والسرعة، ويسمى **كمية الحركة** ويرمز لها بـ $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}}$$

حيث:

- m: كتلة الجسم (بالكيلوغرام – kg).
- $\vec{V}$: سرعة الجسم المتجهة (بالمتر في الثانية – m/s).
- $\vec{p}$: كمية الحركة (بوحدة kg·m/s).

تفسير فيزيائي: كمية الحركة تمثل "القوة الحركية" التي يمتلكها جسم متحرك، أي مقياس لقدرة الجسم على الاستمرار في حركته رغم تأثير القوى الخارجية عليه.

ملاحظات 6

ملاحظة 1: يمكن صياغة **مبدأ العطالة** بطريقة مكافئة باستخدام كمية الحركة كما يلي:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = m\vec{V} = \text{ثابت}$$

أي أنه في غياب القوى الخارجية، تنتقل الأجسام **بكمية حركة ثابتة** (وهذا يعادل القول إن الجسم يبقى في حالة سكون أو حركة مستقيمة منتظمة).

ملاحظة 2: إذا كانت لدينا **منظومة مكونة من عدة أجسام مادية** N، لكل منها كتلة $m_1, m_2, \ldots, m_N$ وسرعاتها $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_N$، فإن كمية الحركة الكلية للمنظومة (أو ما يُسمى بالـ **System the of Momentum**) هي مجموع كميات الحركة لكل جسم على حدة:

$$\vec{p}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$$

وهذه الكمية المتجهة تُستعمل في دراسة التفاعلات بين الأجسام (مثل التصادمات والانفجارات الميكانيكية).

خواص كمية الحركة:

- $\vec{p}$ كمية **متجهة (Vectorial)**، أي تُحدد بالمقدار والاتجاه.
- تعتمد على كتلة الجسم وسرعته، لذلك فهي تختلف من جسم لآخر حتى لو كانت السرعة نفسها.
- يمكن أن تتغير بمرور الزمن إذا أثرت على الجسم قوى خارجية.

العلاقة مع القانون الثاني لنيوتن: باشتقاق تعريف كمية الحركة نحصل على:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

إذا كانت الكتلة ثابتة، نحصل على:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

أي أن محصلة القوى الخارجية تساوي معدل تغير كمية الحركة.

ملاحظات 7

ملاحظات ختامية:

- كمية الحركة ثابتة فقط إذا كانت محصلة القوى الخارجية منعدمة.
- مبدأ انحفاظ كمية الحركة يُعدّ أساس دراسة الظواهر التصادمية.
- يمكن تعريف ما يسمى بـ **الدفعة (Impulse)** وهي التأثير الزمني للقوة:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \Delta \vec{p}$$

أي أن دفعة القوة تساوي التغير في كمية الحركة.

5.5 قوانين نيوتن

تمثل قوانين نيوتن الثلاثة الأساس الذي يقوم عليه الميكانيك الكلاسيكي. هذه القوانين عبارة عن مبادئ تجريبية وُضعت دون برهان، ولكنها أُثبتت تجريبيًا وصمدت أمام معظم التجارب في المراجع الغاليليّة.

1.5.5 القانون الأول (مبدأ العطالة)

تطرقنا إليه سابقًا، وينص على أن الجسم يبقى ساكنًا أو يتحرك حركة مستقيمة منتظمة ما لم تؤثر عليه قوى خارجية تغير من حالته الحركية.

2.5.5 القانون الثاني (المبدأ الأساسي للتحريك – Fundamental Principle of Dynamics PFD) ,

ينص هذا القانون على أنه إذا أثرت مجموعة من القوى الخارجية على جسم متحرك M، فإن ذلك يؤدي إلى تغير في كمية حركته $\vec{p}$، ويُكتب القانون في صورته العامة كما يلي:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

حيث:

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$: محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم.
- $\vec{p} = m\vec{V}$: كمية حركة الجسم (الكتلة مضروبة في السرعة).

حالة الكتلة الثابتة: عندما تكون الكتلة m ثابتة أثناء الحركة (وهي الحالة العامة في الميكانيك الكلاسيكي)، يُصبح القانون على الشكل:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$$

أي أن **مجموع القوى الخارجية المؤثرة على جسم ما يساوي حاصل ضرب كتلته في تسارعه.**

تفسير فيزيائي: كلما كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم أكبر، كان تسارعه أكبر، بينما إذا زادت الكتلة، فإن تسارعه يقل تحت نفس القوة.

حالة الكتلة المتغيرة: في بعض الحالات، تتغير كتلة الجسم أثناء الحركة (كما في الصواريخ أو الأجسام المتآكلة). عندها نشتق التعبير العام لكمية الحركة:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

وهنا يظهر لدينا حدّان:

- الحد الأول $\frac{dm}{dt}\vec{V}$: يمثل تأثير تغير الكتلة مع الزمن.
- الحد الثاني $m\frac{d\vec{V}}{dt}$: يمثل تأثير تغير السرعة (التسارع).

مثال توضيحي:

- كرة جليد متحركة تكتسب كتلة إضافية أثناء تدحرجها (بسبب التصاق الثلج بها). ⟹ كتلتها تزداد مع الزمن.
- صاروخ ينطلق في الفضاء، تقل كتلته مع الزمن بسبب احتراق الوقود وخروج الغازات. ⟹ كتلته تتناقص مع الزمن.

ملاحظة مهمة:

- في حالة الصواريخ، يُطبق القانون الثاني بصيغته العامة لأن جزءًا من الكتلة يغادر النظام.
- لهذا السبب، يُدرس ما يُعرف بـ **ديناميكا الكتلة المتغيرة** لتفسير حركات مثل الطائرات النفاثة أو الصواريخ.

ملخص عام:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \begin{cases} m\vec{a}, & \text{إذا كانت الكتلة ثابتة} \\ \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}, & \text{إذا كانت الكتلة متغيرة} \end{cases}$$

3.5.5 القانون الثالث لنيوتن

النص: إذا أثرت جملة (1) على جملة (2) بقوة $\vec{F}_{1/2}$، فإن الجملة (2) تؤثر بدورها على الجملة (1) بقوة أخرى $\vec{F}_{2/1}$ تكون مساوية لها في المقدار ومعاكسة لها في الاتجاه، أي:

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}}$$

التفسير الفيزيائي: هذا القانون يُعرف باسم **مبدأ الفعل ورد الفعل** ، ويعبّر عن أن القوى دائمًا **تظهر في أزواج**:

- قوة تُسمى "الفعل" ($\vec{F}_{1/2}$) تمارسها الجملة (1) على الجملة (2).
- وقوة تُسمى "ردّ الفعل" ($\vec{F}_{2/1}$) تمارسها الجملة (2) على الجملة (1).

هاتان القوتان:

- لهما نفس الشدة: $|\vec{F}_{1/2}| = |\vec{F}_{2/1}|$
- لهما نفس خط العمل (نفس المستقيم الحامل)
- متعاكستان في الاتجاه
- تؤثر كل واحدة على جسم مختلف (ولا تلغيان بعضهما لأنهما لا تؤثران على نفس الجسم)

مثال توضيحي:

- عندما ندفع جدارًا بقوة يد على الجدار $\vec{F}$، فإن الجدار يؤثر علينا بقوة مساوية ومعاكسة الجدار على اليد $\vec{F}$. ورغم أن الجدار لا يتحرك (لأن كتلته كبيرة جدًا)، إلا أن القوة موجودة بالفعل.
- أثناء المشي، تدفع القدم الأرض إلى الخلف بقوة القدم على الأرض $\vec{F}$، بينما تدفع الأرض القدم إلى الأمام بقوة معاكسة الأرض على القدم $\vec{F}$ — وهي التي تجعلنا نتقدم للأمام.
- عندما يُطلق مسدس رصاصة، تؤثر الرصاصة على المسدس بقوة ارتداد مساوية ومعاكسة للقوة التي يؤثر بها المسدس على الرصاصة.

تطبيق فيزيائي: في حالة تصادم جسمين m_1 و m_2، تؤثر كل كتلة على الأخرى بقوة لحظية:

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

وبالتالي:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

ومنها نحصل على مبدأ مهم جدًا:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

أي أن:

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{ثابت}}$$

وهذا يقودنا مباشرة إلى **مبدأ انحفاظ كمية الحركة .**

ملاحظات هامة:

- قوى الفعل وردّ الفعل لا تلغي بعضها لأنها تؤثر على جسمين مختلفين.
- كل تفاعل فيزيائي بين جسمين يُنتج دائمًا قوتين متبادلتين ومتساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه.
- هذا القانون يفسر كيفية تحرك الكائنات والمركبات (مثل السباحة، الطيران، والاحتراق الصاروخي).

خلاصة:

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}}$$

كل قوة تؤدي إلى قوة معاكسة مساوية لها في المقدار، وهذا التبادل المتزن للقوى هو أساس فهم التفاعلات الميكانيكية في الطبيعة.

4.5.5 برهان القانون الثالث لنيوتن

البرهان:

لنعتبر جسمين ماديين (1) و(2) يتفاعلان فيما بينهما فقط، أي أن الجملة المكوَّنة منهما **معزولة**، أي لا تؤثر عليها أية قوى خارجية. إذن لدينا:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

وحسب المبدأ الأساسي للتحريك (القانون الثاني لنيوتن):

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

حيث:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

هي كمية الحركة الكلية للجسمين معًا.

إذن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

لكن وفق القانون الثاني لنيوتن، يمكننا كتابة:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{2/1} \quad \text{و} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1/2}$$

وبالتعويض نجد:

$$\boxed{\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}}$$

الاستنتاج: إذن لكل فعل قوة مساوية له في الشدة ومعاكسة له في الاتجاه. أي أن القوى المتبادلة بين جسمين متفاعلين دائمًا:

- متساوية في المقدار: $|\vec{F}_{1/2}| = |\vec{F}_{2/1}|$
- متعاكسة في الاتجاه
- تؤثر على جسمين مختلفين

الشرح الفيزيائي: يُظهر هذا البرهان أن القانون الثالث لنيوتن ليس فقط مبدأ تجريبي، بل يمكن استنتاجه من **انحفاظ كمية الحركة** في جملة معزولة. فإذا كانت القوى الداخلية فقط هي التي تؤثر بين الجسمين، فإن التغير في كمية حركة أحد الجسمين يقابله تغير معاكس تمامًا في الآخر، مما يحافظ على مجموع كمية الحركة الكلية ثابتًا:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{ثابت}$$

خلاصة:

$$\boxed{\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}}$$

لكل فعلٍ ردّ فعلٍ يساويه في الشدة ويعاكسه في الاتجاه.

6.5 قانون الجذب العام لنيوتن

مقدمة :
قانون الجذب العام الذي وضعه نيوتن سنة 1687 هو أحد أعمدة الميكانيك الكلاسيكي، ومن خلاله استطاع تفسير العديد من الظواهر الطبيعية مثل:

- سقوط الأجسام نحو الأرض.
- حركة الكواكب حول الشمس.
- ظاهرة المدّ والجزر.

النص القانوني: كل جسمين ماديين في الكون يتجاذبان بقوة تتناسب طرديًا مع حاصل ضرب كتلتيهما، وعكسيًا مع مربع المسافة الفاصلة بين مركزيهما.

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}}$$

$$: F : ().m_1, m_2 : ().d : ().G : .$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$$

ملاحظات:

- القوة F متبادلة، أي أن الجسم (1) يؤثر على الجسم (2) بنفس القوة التي يؤثر بها (2) على (1)، لكن في اتجاه معاكس:
$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$
- هذا القانون صالح لجميع الأجسام المادية مهما كانت المسافات بينها (من الذرات إلى الكواكب).

حالة جسم قريب من الأرض:

لنعتبر جسمًا كتلته m على ارتفاع h من سطح الأرض، حيث كتلة الأرض M_T ونصف قطرها R_T.

القوة الجاذبة التي تؤثر بها الأرض على الجسم هي:

$$F = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

لكن هذه القوة تساوي وزن الجسم:

$$F = mg$$

إذن:

$$g = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

وعندما يكون الجسم قريبًا جدًا من سطح الأرض (أي $h \approx 0$):

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

قيم تقريبية:

$$M_T = 5.98 \times 10^{24}\,\text{kg}, \quad R_T = 6.37 \times 10^6\,\text{m}$$

إذن:

$$g_0 \approx 9.83\,\text{m/s}^2$$

ملاحظة: قيمة الجاذبية تختلف من مكان لآخر على سطح الأرض لأن شكلها غير كروي تمامًا — فهي **مفلطحة عند القطبين ومنتفخة عند خط الاستواء.**

$$g_{\text{الاستواء}} \approx 9.80\,\text{m/s}^2 \quad \text{و} \quad g_{\text{القطب}} \approx 9.87\,\text{m/s}^2$$

أي أن:

$$g = f(h)$$

أي أن التسارع الجاذبي يتناقص كلما ابتعدنا عن سطح الأرض.

تطبيق: احسب تسارع الجاذبية على سطح القمر، علمًا أن:

$$M_L = 7.36 \times 10^{22}\,\text{kg}, \quad R_L = 1.738 \times 10^6\,\text{m}$$

$$g_0 = G\frac{M_L}{R_L^2}$$

بالتعويض:

$$g_0 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.36 \times 10^{22}}{(1.738 \times 10^6)^2}$$

$$\boxed{g_0 \approx 1.63\,\mathrm{m/s^2}}$$

استنتاج: تسارع الجاذبية على سطح القمر يساوي تقريبًا سدس تسارع الجاذبية الأرضية:

$$g_L \approx \frac{1}{6} g_T$$

ولهذا السبب يظهر رواد الفضاء وكأنهم "يقفزون بخفة" على سطح القمر.

1.6.5 قوى التلامس أو قوى الربط

تعريف: قوى التلامس هي القوى الناتجة عن تماس جسمين فيزيائيين فيما بينهما. تعمل هذه القوى عند سطح التلامس وتُمارس من أحد الجسمين على الآخر. من بين أهم هذه القوى نجد:

- **قوة رد الفعل من المستوى**
- **قوى الاحتكاك**

فعل المستوى على الجسم

لنفترض جسمًا ماديًا موضوعًا فوق سطح أفقي S، كما في الشكل. يؤثر السطح على الجسم بقوة تلامسية عمودية على السطح نرمز لها بـ $\vec{R}$، بينما تؤثر الأرض على الجسم بقوة جذب عمودية نحو الأسفل نرمز لها بـ $\vec{P}$.

$$\vec{R} = -\vec{P}$$

إذا كان الجسم في حالة توازن ساكنة، فإن مقدار القوتين متساوي:

$$R = P = mg$$

وهذا توافق مباشر مع **مبدأ العطالة** حيث لا يوجد تسارع في الجسم.

ملاحظة هامة: هذه العلاقة ليست عامة دائمًا، إذ يمكن أن تتغير إذا كان السطح مائلًا أو كانت هناك قوى إضافية (شد، دفع، احتكاك...).

أمثلة توضيحية:

- عندما يكون الجسم على سطح أفقي تمامًا:

$$R = P$$

- عندما يكون الجسم على سطح مائل بزاوية α:

$$R = P\cos\alpha < P$$

أي أن قوة رد الفعل أقل من وزن الجسم.

- عندما يكون الجسم مضغوطًا للأسفل بقوة خارجية إضافية $\vec{F}$:

$$R > P$$

لأن السطح يحتاج إلى رد فعل أكبر لمعادلة القوى.

- أما إذا كانت هناك قوة رفع للأعلى (مثل زنبرك أو ضغط هواء):

$$R < P$$

لأن القوة الخارجية تعاكس الوزن فتقلل من الضغط على السطح.

2.6.5 قوى الاحتكاك

الاحتكاك هو القوة التي تظهر عندما يكون هناك تماس بين سطحين، وتعمل دائمًا على **مقاومة الحركة** النسبية بينهما. أي أن اتجاه قوة الاحتكاك يكون معاكسًا لاتجاه الحركة أو لمحاولة الحركة.

تُصنف قوى الاحتكاك إلى نوعين أساسيين:

- **أ. الاحتكاك الساكن :** يظهر عندما يكون الجسم ساكنًا ويحاول أن يتحرك، ويزداد تدريجيًا حتى يصل إلى قيمة عظمى تمنع الجسم من الانزلاق.

$$f_s \le f_{s\max} = \mu_s R$$

حيث μ_s هو معامل الاحتكاك الساكن.

- **ب. الاحتكاك الحركي :** يظهر عندما يبدأ الجسم في الحركة فعلاً، ويكون أقل من الاحتكاك الساكن.

$$f_k = \mu_k R \quad \text{مع} \quad \mu_k < \mu_s$$

ملاحظات:

- الاحتكاك قوة **ضرورية في الحياة اليومية**، فهي التي تسمح لنا بالمشي، وبدوران العجلات، وتوقف المركبات عند الفرملة.
- رغم فائدته، فإن الاحتكاك يؤدي إلى **تبديد الطاقة الميكانيكية** على شكل حرارة.
- يُقاس معامل الاحتكاك تجريبيًا ولا يعتمد على مساحة السطح، بل على نوع المادتين المتلامستين.

خلاصة: قوى التلامس تشمل قوتين أساسيتين: قوة رد الفعل العمودية ($\vec{R}$) التي تمنع الاختراق، وقوة الاحتكاك ($\vec{f}$) التي تعارض الحركة. هاتان القوتان تشكلان معًا التفاعل الكامل بين السطحين المتلامسين:

$$\boxed{\vec{T} = \vec{R} + \vec{f}}$$

حيث $\vec{T}$ تمثل القوة التلامسية الكلية.

قوة الاحتكاك السكوني

التعريف: قوة الاحتكاك السكوني هي القوة التي تمنع الجسم من الانزلاق عندما نؤثر عليه بقوة خارجية صغيرة. وتنمو هذه القوة تدريجيًا لتوازن القوة المطبقة، إلى أن تصل إلى قيمة عظمى $f_{s(max)}$، عندها يكون الجسم على وشك بدء الحركة.

$$\boxed{f_s \leq f_{s(max)} = \mu_s R}$$

حيث:

- f_s: قوة الاحتكاك السكوني
- R: القوة العمودية
- μ_s: معامل الاحتكاك السكوني

شرح الظاهرة: عندما يكون الجسم على سطح أفقي:

$$R = P = mg, \quad f_s = 0$$

يبقى الجسم ساكنًا لعدم وجود أي قوة أفقية مؤثرة. وعند تطبيق قوة صغيرة F، تنشأ في المقابل قوة احتكاك مساوية ومعاكسة في الاتجاه:

$$f_s = F$$

تستمر هذه الحالة ما دام الجسم ساكنًا، إلى أن تبلغ قوة السحب F القيمة الحرجة التي لا يستطيع الاحتكاك مجاراتها، فتتحقق الحالة:

$$f_s = f_{s(max)} = \mu_s R$$

وبمجرد تجاوزها يبدأ الجسم بالحركة.

التحليل الهندسي:

عند تمثيل القوى المؤثرة على الجسم:

$$f_s = R\tan(\theta)$$

وعندما تصل زاوية الميل إلى قيمتها القصوى θ_{max}، نحصل على:

$$f_{s(max)} = R\tan(\theta_{max}) = \mu_s R$$

أي أن معامل الاحتكاك السكوني هو ظل الزاوية التي تجعل الجسم على وشك الحركة.

ملخص فيزيائي:

- كلما زادت قوة السحب F، ازدادت قوة الاحتكاك السكوني f_s لمعادلتها.
- عندما تصل F إلى القيمة $f_{s(max)}$، يكون الجسم على وشك الانزلاق.
- إذا تجاوزت $F > f_{s(max)}$، يبدأ الجسم بالحركة وينتقل إلى حالة الاحتكاك الحركي.

$$\boxed{f_{s(max)} = \mu_s R}$$

ملاحظة مهمة:

- الحركة تبدأ فقط عندما تتحقق $F > f_{s(max)}$.
- معامل الاحتكاك μ_s يُحدَّد تجريبيًا ويعتمد على نوعي السطحين المتلامسين (خشب–خشب، معدن–معدن، مطاط–أسفلت...).
- قيمة μ_s لا تتعلق بمساحة التلامس ولا بكتلة الجسم، بل بخشونة السطحين.

مثال تطبيقي:

جسم كتلته $m = 5\,\text{kg}$ على سطح خشن حيث $\mu_s = 0.3$. ما أكبر قوة أفقية يمكن تطبيقها دون أن يتحرك الجسم؟

$$R = mg = 5 \times 9.81 = 49.05\,\text{N}$$

$$f_{s(max)} = \mu_s R = 0.3 \times 49.05 = 14.72\,\text{N}$$

النتيجة: يبقى الجسم ساكنًا إذا كانت $F \le 14.72\,\text{N}$، ويبدأ بالحركة عندما تتجاوز $F > 14.72\,\text{N}$.

قوة الاحتكاك الحركي

التعريف: عندما يبدأ الجسم في الحركة بعد تجاوز الاحتكاك السكوني الأعظمي، تتولّد قوة جديدة تُسمّى **قوة الاحتكاك الحركي** (أو الديناميكي)، وترمز إلى المقاومة التي يعاني منها الجسم أثناء انزلاقه على سطح آخر.

نرمز لها بـ $\vec{f}_c$ أو $\vec{f}_k$، ويعبر عنها بالعلاقة:

$$\boxed{f_c = \mu_c R}$$

حيث:

- f_c: قوة الاحتكاك الحركي
- μ_c: معامل الاحتكاك الحركي
- R: القوة العمودية

ملاحظات:

- قيمة f_c ثابتة تقريبًا أثناء الحركة ولا تعتمد على السرعة، لكنها أقل من الاحتكاك السكوني الأعظمي:

$$f_c < f_{s(max)}$$

- تُحدد قيمة معامل الاحتكاك الحركي تجريبيًا حسب نوع المادتين المتلامستين.
- في بعض الكتب يُرمز إلى μ_c بالرمز μ_d .

تفسير فيزيائي: عند بدء الحركة، تتناقص قوة التلامس بين نتوءات السطحين لأن نقاط التلامس تتكسر جزئيًا، فيصبح الاحتكاك أقل مما كان عليه عندما كان الجسم ساكنًا. وهذا ما يفسّر أن تحريك جسم ساكن أصعب من الاستمرار في دفعه بعد أن يتحرك.

تطبيق 1:

وُضع جسم كتلته $80\,\mathrm{N}$ على سطح أفقي خشن. أُثرت عليه قوة شد مقدارها $20\,\mathrm{N}$ تميل بزاوية $30°$ عن الأفق. معامل الاحتكاك السكوني هو $\mu_s = 0.3$.

المطلوب:

1. إيجاد شدة قوة الاحتكاك السكوني f_s

2. إيجاد شدة القوة العمودية R

3. حساب $f_{s(max)}$

4. حساب القوة اللازمة لبدء الحركة

الحل:

$$f_s = F\cos(\alpha) = 20\cos(30^\circ) \approx 17.32\,\text{N}$$
$$R = P - F\sin(\alpha) = 80 - 20\sin(30^\circ) = 70\,\text{N}$$
$$f_{s(max)} = \mu_s R = 0.3 \times 70 = 21\,\text{N}$$
$$F_{(\text{mouvement du début})} = \frac{f_{s(max)}}{\cos(\alpha)} = \frac{21}{\cos(30^\circ)} \approx 24.25\,\text{N}$$

النتيجة: يبدأ الجسم بالحركة عندما تتجاوز قوة الشد $24.25\,\text{N}$.

تطبيق 2:

ينزلق جسم كتلته $10.2\,\text{kg}$ على سطح أفقي خشن تحت تأثير قوة شد مقدارها $20\,\text{N}$ تميل بزاوية 45° مع الأفق إلى الأعلى. معامل الاحتكاك الحركي هو $\mu_c = 0.15$، والتسارع الأرضي $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

المطلوب:

1. حساب القوة العمودية R

2. حساب قوة الاحتكاك الحركي f_c

3. حساب محصلة القوى الأفقية

4. حساب تسارع الجسم a

الحل:

$$R = P - F\sin(45^\circ) = 10.2 \times 9.8 - 20 \times \sin(45^\circ) \approx 85.82\,\text{N}$$
$$f_c = \mu_c R = 0.15 \times 85.82 \approx 12.9\,\text{N}$$
$$\sum F_x = F\cos(45^\circ) - f_c = 20\cos(45^\circ) - 12.9 = 1.24\,\text{N}$$
$$a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{1.24}{10.2} \approx 0.12\,\text{m/s}^2$$

النتيجة: يتحرك الجسم بسرعة متزايدة تدريجيًا بتسارع صغير $a = 0.12\,\text{m/s}^2$.

الخلاصة العامة:

- الاحتكاك السكوني يمنع الحركة، بينما الاحتكاك الحركي يقاومها بعد أن تبدأ.
- العلاقة العامة بينهما هي:

$$f_c < f_{s(max)}$$

- يُحدد نوع الاحتكاك حسب حالة الجسم:

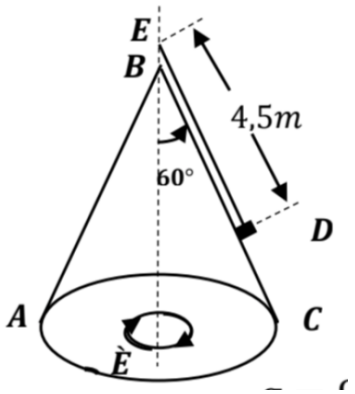
$$\begin{cases} f_s = F & \text{إذا كان الجسم ساكنًا (Equilibrium)} \\ f_c = \mu_c R & \text{إذا كان الجسم متحركًا (Motion)} \end{cases}$$

باب 6

سلسلة تمارين رقم 4 التحريك للنقطة مادية

التمرين 2:

ينتقل جسم D كتلته $m = 5.5\,\text{kg}$ بدون احتكاك على سطح مخروط ABC (انظر الشكل 1)، وذلك بدورانه حول المحور EE بسرعة زاوية $\omega = 4.5\,\text{rad/s}$. أحسب:



شكل 1.6: التمرين 2

نأخذ $g = 9.8\,\text{m.s}^{-2}$.

1. السرعة الخطية للجسم.

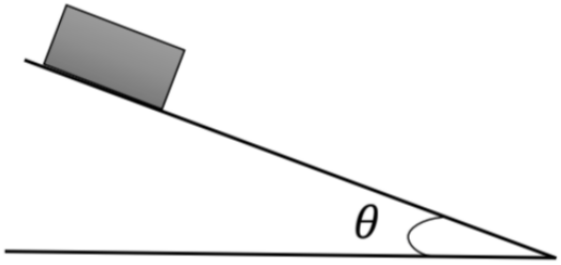
2. رد فعل السطح على الجسم.

3. شد الخيط (إذا وُجد).

4. السرعة الزاوية الدنيا اللازمة لكي يبتعد الجسم عن سطح المخروط.

التمرين 3:

يوضح الشكل التالي جسمًا وزنه $W = 5\,\mathrm{N}$ موضوعًا على مستوى خشن مائل بزاوية $35°$. معامل الاحتكاك السكوني هو $\mu_s = 0.80$، ونأخذ $g = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

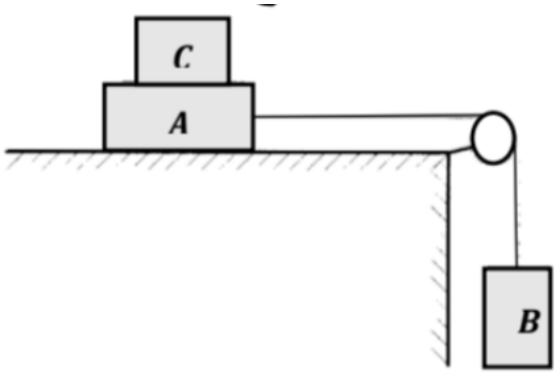


شكل 2.6: التمرين 3

1. ما قيمة زاوية الميل التي يبدأ عندها الجسم في الحركة؟
2. ما قيمة قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية؟
3. ما قيمة القوة العمودية (الناظمية) عند زاوية الميل $\theta = 35°$، ومستنتجًا بذلك قوة الاحتكاك السكوني الفعلية؟

فرضًا أن $\theta = 40°$، ما طبيعة حركة الجسم؟ علما أن معامل الاحتكاك الحركي هو $\mu_c = 0.60$.

التمرين 4:



شكل 3.6: تمرين 4

كتلتا الجسمين A و B في الشكل أدناه هما على التوالي $m_A = 5\text{kg}$ و $m_B = 10\text{kg}$. معامل الاحتكاك بين الجسم A والطاولة هو $\mu = 0.40$.

نهمل كتلة البكرة ونفترض أن الخيط مهمل الكتلة وعديم الامتطاط.

1. أوجد الكتلة الدنيا m_C للجسم C التي تمنع النظام من التحرك (أي تمنع الجسم A من الانزلاق).

2. عند إزالة الجسم C، يتحرك النظام بتسارع مقداره $a = 1.3\,\text{m/s}^2$. أوجد قيمة معامل الاحتكاك الجديد بين A والطاولة.

الحل النموذجي لسلسلة تمارين 4

الحل النموذجي — التمرين 2

المعطيات:

- كتلة الجسم: $m = 5.5\,\text{kg}$
- السرعة الزاوية: $\omega = 4.5\,\text{rad/s}$
- تسارع الجاذبية: $g = 9.8\,\text{m/s}^2$
- نفترض أن نصف قطر دوران الجسم حول محور المخروط هو R
- نفترض أن زاوية ميل جانبي المخروط مع الأفقي هي θ (هذه المعلومة ضرورية من الشكل)
- نفترض وجود خيط يربط الجسم بالنقطة العليا للمخروط

1. حساب السرعة الخطية للجسم:

السرعة الخطية v مرتبطة بالسرعة الزاوية ω ونصف قطر الدوران R بالعلاقة:

$$v = \omega R$$

$$\boxed{v = 4.5\,R\,\text{m/s}}$$

حيث R هو نصف قطر دوران الجسم (يجب تعويض قيمته من المعطيات الإضافية في الشكل).

2. حساب رد فعل السطح على الجسم:

لحساب رد الفعل N، نُحلل القوى المؤثرة على الجسم في الاتجاهين:

- في الاتجاه الشعاعي (المركزي): $N\sin\theta = m\omega^2 R$
- في الاتجاه العمودي على السطح: $N\cos\theta - mg = 0$

من المعادلة الثانية:

$$N\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\boxed{N = \frac{5.5 \times 9.8}{\cos\theta} = \frac{53.9}{\cos\theta}\,\text{N}}$$

حيث θ هي زاوية ميل سطح المخروط (يجب تعويض قيمتها من الشكل).

3. حساب شد الخيط:

إذا كان الجسم مربوطًا بخيط، فإن شد الخيط T يحسب من تحليل القوى في الاتجاه العمودي:

$$T\cos\theta = mg$$

$$\boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{53.9}{\cos\theta}\,\mathrm{N}}$$

(في حالة عدم وجود خيط، يُهمل هذا البند).

4. حساب السرعة الزاوية الدنيا لابتعاد الجسم عن السطح:

يبتعد الجسم عن السطح عندما يصبح رد الفعل $N = 0$. عندها تكون القوة المركزية مُوفَّرة بالكامل بواسطة مركبة الوزن في الاتجاه الشعاعي:

$$mg\tan\theta = m\omega_{\min}^2 R$$

$$\omega_{\min}^2 = \frac{g\tan\theta}{R}$$

$$\boxed{\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}}$$

بتعويض القيم العددية (إذا كانت R و θ معلومتين):

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{9.8\times\tan\theta}{R}}\,\mathrm{rad/s}$$

الحل النموذجي — التمرين 3

المعطيات:

- وزن الجسم: $W = 5\,\text{N}$
- تسارع الجاذبية: $g = 10\,\text{m/s}^2$
- كتلة الجسم: $m = \dfrac{W}{g} = \dfrac{5}{10} = 0.5\,\text{kg}$
- معامل الاحتكاك السكوني: $\mu_s = 0.80$
- معامل الاحتكاك الحركي: $\mu_c = 0.60$
- زاوية الميل الأولى: $\theta_1 = 35^\circ$
- زاوية الميل الثانية: $\theta_2 = 40^\circ$

1. زاوية الميل التي يبدأ عندها الجسم في الحركة:

تبدأ الحركة عندما تتساوى مركبة الوزن الموازية للمستوي مع قوة الاحتكاك السكوني القصوى:

$$mg\sin\theta_s = \mu_s mg\cos\theta_s$$

$$\tan\theta_s = \mu_s = 0.80$$

$$\theta_s = \arctan(0.80) \approx 38.66^\circ$$

$$\boxed{\theta_s \approx 38.7^\circ}$$

2. قوة الاحتكاك السكوني الأعظمية:

$$f_{s,\max} = \mu_s mg\cos\theta_s$$

$$f_{s,\max} = 0.80 \times 0.5 \times 10 \times \cos(38.66^\circ)$$

$$\cos(38.66^\circ) \approx 0.7809$$

$$f_{s,\max} \approx 0.80 \times 5 \times 0.7809 \approx 3.124\,\text{N}$$

$$\boxed{f_{s,\max} \approx 3.12\,\text{N}}$$

3. عند $\theta = 35^\circ$:

1. القوة العمودية (الناظمية):

$$N = mg\cos\theta = 0.5 \times 10 \times \cos 35^\circ$$

$$\cos 35^\circ \approx 0.8192$$

$$N \approx 5 \times 0.8192 \approx 4.096\,\text{N}$$

$$\boxed{N \approx 4.10\,\text{N}}$$

2. **قوة الاحتكاك السكوني الفعلية:** بما أن $\theta = 35^\circ < \theta_s \approx 38.7^\circ$، الجسم ساكن:

$$f_s = mg\sin\theta = 0.5 \times 10 \times \sin 35^\circ$$

$$\sin 35^\circ \approx 0.5736$$

$$f_s \approx 5 \times 0.5736 \approx 2.868\,\text{N}$$

$$\boxed{f_s \approx 2.87\,\text{N}}$$

4. عندما $\theta = 40^\circ$:

بما أن $40^\circ > \theta_s \approx 38.7^\circ$، الجسم سينزلق.
مركبة الوزن الموازية للمستوي:

$$F_{\parallel} = mg\sin 40^\circ \approx 0.5 \times 10 \times 0.6428 \approx 3.214\,\text{N}$$

قوة الاحتكاك الحركي:

$$f_c = \mu_c mg\cos 40^\circ \approx 0.60 \times 0.5 \times 10 \times 0.7660 \approx 2.298\,\text{N}$$

القوة المحصلة:

$$F_{\text{net}} = F_{\parallel} - f_c \approx 3.214 - 2.298 \approx 0.916\,\text{N}$$

بما أن $F_{\text{net}} > 0$، الجسم يتسارع إلى أسفل المستوي.

$$\boxed{\text{حركة متسارعة إلى أسفل المستوي}}$$

التسارع:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} \approx \frac{0.916}{0.5} \approx 1.832\,\text{m/s}^2$$

$$\boxed{a \approx 1.83\,\text{m/s}^2}$$

الحل النموذجي — التمرين 4

1. إيجاد الكتلة الدنيا m_C

النظام يتكون من الكتلتين A و B مربوطتين بحبل يمر على بكرة عديمة الاحتكاك. الكتلة A على سطح أفقي معامل احتكاكه $\mu = 0.40$. الكتلة C توضع فوق A لزيادة قوة الاحتكاك.

شرط عدم الحركة (التوازن):

$$T = m_B\, g \qquad (\text{للجسم } B)$$

$$T = F_{\text{احتكاك}} \le \mu N \qquad (\text{للجسم } A)$$

حيث $N = (m_A + m_C)\, g$ هي القوة العمودية.

عند الحد الأدنى للكتلة m_C يكون النظام على وشك الحركة، فيكون الاحتكاك أقصى احتكاك سكوني:

$$m_B\, g = \mu\,(m_A + m_C)\, g$$

نقسم على g:

$$m_B = \mu\,(m_A + m_C)$$

$$m_C = \frac{m_B}{\mu} - m_A$$

نعوض $m_A = 5\,\text{kg}$,$m_B = 10\,\text{kg}$,$\mu = 0.40$:

$$m_C = \frac{10}{0.40} - 5 = 25 - 5 = 20\,\text{kg}$$

إذن الكتلة الدنيا لـ C هي $\boxed{20\,\text{kg}}$.

2. إيجاد معامل الاحتكاك الجديد μ'

بعد إزالة الكتلة C تبقى الكتلة A كتلها $5\,\text{kg}$ فقط. يتحرك النظام بتسارع $a = 1.3\,\text{m/s}^2$. نطبق قانون نيوتن الثاني على كل جسم:

- للجسم B (يتحرك للأسفل):

$$m_B g - T = m_B a \qquad (1)$$

- للجسم A (يتحرك أفقياً نحو البكرة):

$$T - F_{\text{احتكاك}} = m_A a \qquad \text{حيث } F_{\text{احتكاك}} = \mu' m_A g \qquad (2)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) بحذف T:

$$m_B g - \mu' m_A g = (m_A + m_B) a$$

$$\mu' m_A g = m_B g - (m_A + m_B) a$$
$$\mu' = \frac{m_B g - (m_A + m_B) a}{m_A g}$$

نعوض القيم $\left(g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)$:

$$\mu' = \frac{10 \times 9.8 - (5+10) \times 1.3}{5 \times 9.8} = \frac{98 - 15 \times 1.3}{49} = \frac{98 - 19.5}{49} = \frac{78.5}{49} \approx 1.602$$

إذن معامل الاحتكاك الجديد هو $\boxed{1.60}$ (تقريبًا).

باب 7

الفصل الخامس: العمل والطاقة

1.7 مقدمة

تعريف 1

العمل الميكانيكي في علم الفيزياء هو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما وبمسافة ما.

1.1.7 العمل الميكانيكي يتوقف على:

- شدة القوة F المنجزة للعمل.
- مقدار الانتقال لنقطة تأثيرها من A إلى B.
- الزاوية α المحصورة بين شعاع القوة $\vec{F}$ وشعاع الانتقال $\overrightarrow{AB}$.

2.1.7 تعريف القوة الثابتة:

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها ثابتة إذا كانت:

- ثابتة في القيمة (الشدة).
- ثابتة في الاتجاه.

3.1.7 الطاقة:

تعريف 2

تُعرف في الفيزياء بأنها القدرة على أداء عمل. نحتاج الطاقة لطهي الطعام، ولقيادة السيارة، وللقفز في الهواء... وتقاس الطاقة والعمل بالوحدات نفسها.

2.7 تعريف عمل قوة

1.2.7 تعريف عمل قوة ثابتة:

إن عمل قوة ثابتة $\vec{F}$ عندما تنتقل نقطة تأثيرها من A إلى النقطة B (الشكل 1.7) يعطى بالجداء السلمي:

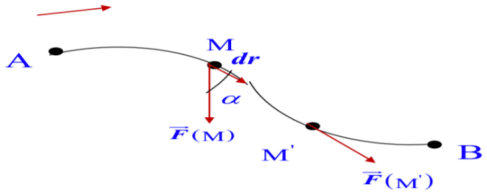
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = F\cdot AB\cdot\cos\alpha$$

وحدة قياس العمل في نظام الوحدات الدولية هي الجول ويرمز له بـ J حيث:

$$1\,\text{Joule} = 1\,\text{Nm}$$

وفي الكهرباء نستعمل الإلكترون فولط:

$$1\,\text{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\text{Joule}$$

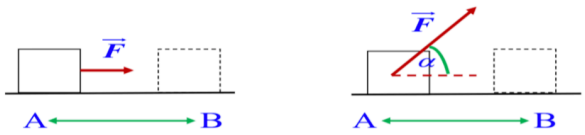


شكل 1.7: عمل القوة

ملاحظات 1

2.2.7 ملاحظة:

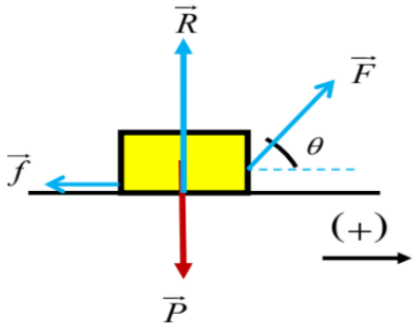
عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع لنقطة التأثير من A إلى B (الشكل 2.7) أي أن عمل $\vec{F}$ له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيمًا أو منحنيًا.



شكل 2.7: عمل فوة ثابتة

3.2.7 تعريف عمل قوة غير ثابتة:

إذا كانت القوة $\vec{F}$ متغيرة في الشدة فإن عملها لا يساوي $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ بل يجب تقسيم المسار إلى انتقالات عنصرية $d\vec{r}$ وندعو عمل القوة خلال الانتقال العنصري بالعمل العنصري dW.



شكل 3.7: المركبة المماسية للقوة

العمل العنصري:

ليكن الجسم M ينتقل على مسار كيفي خلال فترة زمنية صغيرة dt ينتقل خلالها من الموضع M إلى الموضع M' يعبر عن هذا الانتقال بـ $d\vec{r}$ (الشكل 3.V) حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$$

يعرف العمل العنصري للقوة $\vec{F}$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

حيث:

$$F_T = F\cos\alpha$$

F_T المركبة المماسية للقوة المؤثرة في هذه الحالة:

$$dW = F_T \cdot dr$$

هذا يعني أن المركبة المماسية للقوة المؤثرة هي التي تعمل. أما المركبة العمودية على المسار لا تعمل أي أن عملها يساوي الصفر.

4.2.7 حالات خاصة:

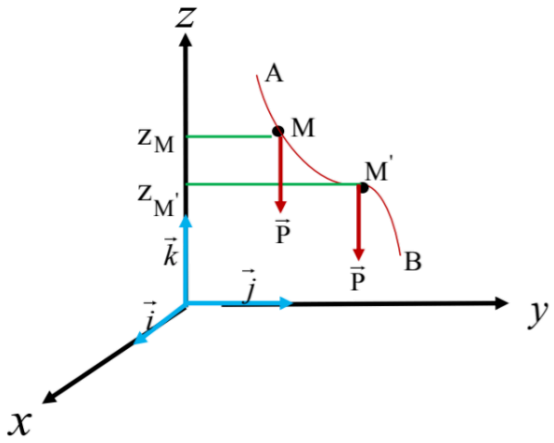
- $dW = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \perp d\vec{r}$ أي $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- $dW > 0$ عندما $\theta < \frac{\pi}{2}$.
- $dW < 0$ عندما $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

إذا كانت $\vec{F}$ ثابتة:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

3.7 مثال 1.V

الجسم الممثل على الشكل خاضع لأربع قوى ثابتة وهو ينتقل على مستوى أفقي. ليكن S انتقال الجسم:



شكل 4.7: عمل قوة الثقالة

- عمل القوة $\vec{F}$: $W_{\vec{F}} = F \cdot S \cdot \cos\theta$
- عمل القوة المقاومة $\vec{f}$: $W_{\vec{f}} = -f \cdot S$
- عمل الثقل $\vec{P}$: $W_{\vec{P}} = 0$
- عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $W_{\vec{N}} = 0$

1.3.7 العبارة التحليلية للعمل:

في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

2.3.7 العمل في الإحداثيات الديكارتية:

يمكن كتابة العمل الكلي للقوة $\vec{F}$ عند الانتقال من النقطة A إلى النقطة B في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x\,dx + \int_A^B F_y\,dy + \int_A^B F_z\,dz \qquad (7.V)$$

4.7 عمل قوة الوزن (القوة الثقالية)

لنحسب عمل قوة الوزن $\vec{P} = m\vec{g}$ المؤثرة على جسم عند انتقاله من النقطة M إلى النقطة M':

$$W_p = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot d\vec{r}$$

باعتبار المحور Oz متجهًا نحو الأعلى، تكون $\vec{P} = -mg\vec{k}$ (حيث $\vec{k}$ هو المتجه الوحدي لمحور Oz):

$$W_p = \int_M^{M'} (-mg\vec{k}) \cdot d\vec{r}$$

بما أن $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$، نحصل على:

$$W_p = -\int_M^{M'} mg\,dz = -mg\int_M^{M'} dz$$

وبإجراء التكامل:

$$W_p = -mg(Z_{M'} - Z_M) = mg(Z_M - Z_{M'}) \qquad (19.\text{V})$$

نُعرّف الارتفاع $h = Z_M - Z_{M'}$ (انخفاض الجسم)، فيصبح عمل الوزن:

$$W_p = mgh$$

وهذا يعني أن عمل الوزن موجب عندما ينخفض الجسم $(h > 0)$، وسالب عندما يرتفع الجسم، وصفر عندما يكون على نفس المستوى الأفقي.

5.7 مقدمة

العمل الميكانيكي في علم الفيزياء هو كمية الطاقة اللازمة لتحريك جسم ما بقوة ما وبمسافة ما.

1.5.7 العمل الميكانيكي يتوقف على:

- شدة القوة F المنجزة للعمل.
- مقدار الانتقال لنقطة تأثيرها من A إلى B.
- الزاوية α المحصورة بين شعاع القوة $\vec{F}$ وشعاع الانتقال $\overrightarrow{AB}$.

2.5.7 تعريف القوة الثابتة:

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها ثابتة إذا كانت:

- ثابتة في القيمة (الشدة).
- ثابتة في الاتجاه.

3.5.7 الطاقة:

تُعرف في الفيزياء بأنها القدرة على أداء عمل. نحتاج الطاقة لطهي الطعام، ولقيادة السيارة، وللقفز في الهواء... وتقاس الطاقة والعمل بالوحدات نفسها.

6.7 تعريف عمل قوة

تعريف 1

1.6.7 تعريف عمل قوة ثابتة:

إن عمل قوة ثابتة $\vec{F}$ عندما تنتقل نقطة تأثيرها من A إلى النقطة B (الشكل 1.V) يعطى بالجداء السلمي:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = F\cdot AB\cdot\cos\alpha$$

وحدة قياس العمل في نظام الوحدات الدولية هي الجول ويرمز له بـ J حيث:

$$1\,\text{Joule} = 1\,\text{Nm}$$

وفي الكهرباء نستعمل الإلكترون فولط:

$$1\,\text{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\text{Joule}$$

ملاحظات 2

2.6.7 ملاحظة:

عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع لنقطة التأثير من A إلى B (الشكل 2.V) أي أن عمل $\vec{F}$ له نفس القيمة مهما كان المسار مستقيمًا أو منحنيًا.

تعريف 2

3.6.7 تعريف عمل قوة غير ثابتة:

إذا كانت القوة $\vec{F}$ متغيرة في الشدة فإن عملها لا يساوي $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ بل يجب تقسيم المسار إلى انتقالات عنصرية $d\vec{r}$ وندعو عمل القوة خلال الانتقال العنصري بالعمل العنصري dW.

العمل العنصري:

ليكن الجسم M ينتقل على مسار كيفي خلال فترة زمنية صغيرة dt ينتقل خلالها من الموضع M إلى الموضع M' يعبر عن هذا الانتقال بـ $d\vec{r}$ (الشكل 3.V) حيث:

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}$$

يعرف العمل العنصري للقوة $\vec{F}$:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cdot dr\cdot\cos\alpha$$

حيث:

$$F_T = F\cos\alpha$$

F_T المركبة المماسية للقوة المؤثرة في هذه الحالة:

$$dW = F_T\cdot dr$$

هذا يعني أن المركبة المماسية للقوة المؤثرة هي التي تعمل. أما المركبة العمودية على المسار لا تعمل أي أن عملها يساوي الصفر.

مثال 1

4.6.7 حالات خاصة:

- $dW = 0 \Leftrightarrow \vec{F}\perp d\vec{r}$ أي $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- $dW > 0$ عندما $\theta < \frac{\pi}{2}$.
- $dW < 0$ عندما $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

5.6.7 العمل في الإحداثيات الديكارتية:

يمكن كتابة العمل الكلي للقوة $\vec{F}$ عند الانتقال من النقطة A إلى النقطة B في الإحداثيات الديكارتية بالصيغة:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x\, dx + \int_A^B F_y\, dy + \int_A^B F_z\, dz \qquad (7.\text{V})$$

7.7 مثال 1.V

الجسم الممثل على الشكل خاضع لأربع قوى ثابتة وهو ينتقل على مستوى أفقي. ليكن S انتقال الجسم:

- عمل القوة $\vec{F}$: $W_{\vec{F}} = F \cdot S \cdot \cos\theta$
- عمل القوة المقاومة $\vec{f}$: $W_{\vec{f}} = -f \cdot S$
- عمل الثقل $\vec{P}$: $W_{\vec{P}} = 0$
- عمل القوة الناظمية $\vec{N}$: $W_{\vec{N}} = 0$

8.7 عمل قوة الوزن (القوة الثقالية)

لنحسب عمل قوة الوزن $\vec{P} = m\vec{g}$ المؤثرة على جسم عند انتقاله من النقطة M إلى النقطة M':

$$W_p = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot d\vec{r}$$

باعتبار المحور Oz متجهًا نحو الأعلى، تكون $\vec{P} = -mg\,\vec{k}$ (حيث $\vec{k}$ هو المتجه الوحدي لمحور Oz):

$$W_p = \int_M^{M'} (-mg\,\vec{k}) \cdot d\vec{r}$$

بما أن $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$، نحصل على:

$$W_p = -\int_M^{M'} mg\, dz = -mg \int_M^{M'} dz$$

وبإجراء التكامل:

$$W_p = -mg(Z_{M'} - Z_M) = mg(Z_M - Z_{M'}) \qquad (19.\text{V})$$

نُعرّف الارتفاع $h = Z_M - Z_{M'}$ (انخفاض الجسم)، فيصبح عمل الوزن:

$$W_p = mgh$$

وهذا يعني أن عمل الوزن موجب عندما ينخفض الجسم $(h > 0)$، وسالب عندما يرتفع الجسم، وصفر عندما يكون على نفس المستوى الأفقي.

9.7 الطاقة الحركية (energy Kinetic)

تعريف 1

1.9.7 تعريف

تُعرّف الطاقة الحركية لنقطة مادية كتلتها m وتتحرك بسرعة $\vec{V}$ بالمقدار E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2$$

حيث $\vec{p} = m\vec{V}$ هي كمية الحركة.

2.9.7 اشتقاق علاقة العمل والطاقة الحركية

لتكن النقطة المادية M كتلتها m تتحرك بين النقطتين A و B تحت تأثير القوة الخارجية $\vec{F}$. خلال الانتقال العنصري، العمل العنصري هو:

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V}dt$$

باستخدام $d\vec{l} = \vec{V}dt$، نحصل على:

$$dW_{\vec{F}} = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$$

بالتكامل بين النقطتين A و B:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

أي:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_c \qquad (29.V)$$

3.9.7 خصائص الطاقة الحركية

- كل جسم في حالة حركة يملك طاقة حركية.
- الطاقة الحركية تتناسب طرديًا مع كتلة الجسم m.
- الطاقة الحركية تتناسب طرديًا مع مربع سرعة الجسم V^2.
- الطاقة الحركية تتعلق بالمعلم (الإطار المرجعي) الذي تدرس من خلاله الحركة.
- وحدة الطاقة الحركية هي الجول (J).

نظرية 3

نظرية الطاقة الحركية

في معلم غاليليني، التغير في الطاقة الحركية لنقطة مادية بين موضعين A و B يساوي عمل محصلة القوى المؤثرة على هذه النقطة خلال انتقالها بين A و B:

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}}) \qquad (30.\text{V})$$

حيث $\vec{F}_{\text{ext}}$ تمثل جميع القوى المؤثرة (محافظة وغير محافظة).

10.7 القوى المحافظة وغير المحافظة

تعريف 1

1.10.7 القوى المحافظة

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها محافظة (أو مشتقة من كمون) إذا كان عملها مستقلًا عن المسار المتبع ويعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية. في هذه الحالة، يوجد دالة سلمية $U(x,y,z)$ (طاقة كامنة) بحيث:

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla}U = -\text{grad}(U) \qquad (31.\text{V})$$

مثال 2

أمثلة على القوى المحافظة:

- قوة الوزن (الثقالة)
- قوة ارتجاع النابض
- قوة الجاذبية العامة
- أي قوة ثابتة بشكل عام

2.10.7 القوى غير المحافظة

نقول عن قوة $\vec{F}$ أنها غير محافظة إذا كان عملها يعتمد على المسار المتبع. غالبًا ما تكون قوى الاحتكاك غير محافظة. نرمز لها بـ $\vec{F}_{\text{nc}}$.

11.7 الطاقة الكامنة (Energy Potential)

تعريف 1

تعريف

إن عمل القوى المحافظة لا يعتمد على المسار المتبع، بل يعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية. يمكن التعبير عن عمل هذه القوى من خلال دالة تسمى الطاقة الكامنة E_p. يكون التغير في الطاقة الكامنة معاكسًا لعمل القوة المحافظة:

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}(\vec{F}_c) \qquad (32.\text{V})$$

وفي حالة التغيرات الصغيرة:

$$dE_p = -\vec{F}_c \cdot d\vec{l}$$

1.11.7 العلاقة بين القوة المحافظة والطاقة الكامنة

في الإحداثيات الديكارتية، إذا كانت $E_p = E_p(x, y, z)$ فإن:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz \qquad (33.\text{V})$$

وبمقارنة هذا التعبير مع $dE_p = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ نحصل على:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \tag{35.V}$$

أي أن:

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla} E_p = -\text{grad}(E_p)$$

وبالتالي:

$$E_p = -\int \vec{F}_c \cdot d\vec{l} + \text{ثابت} \tag{37.V}$$

حيث الثابت يتحدد باختيار مستوى مرجعي للطاقة الكامنة.

مثال 3

أمثلة على الطاقة الكامنة

الطاقة الكامنة الثقالية

لنقطة مادية كتلتها m قريبة من سطح الأرض، نختار محور Oz عموديًا إلى الأعلى. عندها تكون قوة الوزن $\vec{P} = -mg\vec{k}$. الطاقة الكامنة الثقالية هي:

$$E_p(z) = -\int \vec{P} \cdot d\vec{r} + C = -\int (-mg)dz + C = mgz + C$$

عادة نختار $E_p = 0$ عند $z = 0$ (سطح الأرض) فيصبح:

$$E_p(z) = mgz \tag{38.V}$$

الطاقة الكامنة المرونية (لنابض)

لنابض مثبت من أحد طرفيه وكتلته مهملة، يحقق قانون هوك: $\vec{F} = -k\vec{x}$ حيث k ثابت النابض و $\vec{x}$ الإزاحة عن موضع التوازن. الطاقة الكامنة المرونية هي:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

حيث نختار $E_p = 0$ عند موضع التوازن $x = 0$.

2.11.7 الطاقة الكامنة المرونية (لنابض حلزوني)

عندما يُضغط أو يُستطيل نابض، يبذل قوة معاكسة شدتها تتغير بتغير المطال (الإزاحة). يبدأ النابض في تخزين طاقة، لا تلبث أن تظهر بدفع النابض للجسم الصلب مرة أخرى. هذه الطاقة تُسمى **الطاقة الكامنة المرونية** للنابض الحلزوني ويرمز لها بـ E_p.

اشتقاق عبارة الطاقة الكامنة المرونية

نعتبر نابضًا حلزونيًا يخضع لقانون هوك. قوة شد النابض (قوة الارجاع) تعطى بالعلاقة:

$$\vec{F} = \vec{T} = -kx\,\vec{i} \qquad (40.V)$$

حيث:

- k: ثابت المرونة (ثابت النابض) بوحدة نيوتن/متر (N/m)
- x: الاستطالة أو الانضغاط (الإزاحة عن موضع التوازن) بوحدة المتر (m)
- $\vec{i}$: متجه الوحدة في اتجاه المحور x

الطاقة الكامنة المرونية تُعرّف من خلال علاقة التكامل:

$$E_p = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} + C = -\int (-kx)\,dx + C \qquad (41.V)$$

نختار مستوى مرجعي للطاقة بحيث تكون الطاقة الكامنة صفراً عند موضع التوازن $(x=0)$:

$$E_p(0) = 0 \qquad (42.V)$$

بتطبيق هذا الشرط:

$$0 = -\int_0^0 (-kx)\,dx + C = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

بإجراء التكامل:

$$E_p(x) = -\int (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

وبالتالي فإن الطاقة الكامنة المرونية لنابض يخضع لقانون هوك هي:

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

ملاحظات 4

ملاحظات مهمة

- وحدة الطاقة الكامنة المرونية هي الجول .(J)
- وحدة ثابت المرونة k للنابض الحلزوني هي نيوتن/متر .(N/m)
- مقدار الاستطالة أو الانضغاط للنابض يقاس بالمتر .(m)
- الطاقة الكامنة المرونية دائمًا موجبة (أو صفر) لأنها تعتمد على x^2.
- عند تحرير النابض، تتحول الطاقة الكامنة المخزنة إلى طاقة حركية للجسم المتصل به.

12.7 مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية

1.12.7 في حالة القوى المحافظة فقط

عندما يكون الجسم (أو الجملة) خاضعًا لقوى محافظة فقط (مثل قوة الوزن في حالة السقوط الحر)، فإن الطاقة الميكانيكية الكلية تبقى محفوظة مع الزمن. أي أن مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة يظل ثابتًا.

الصيغة الرياضية

تُعرف الطاقة الميكانيكية E_M على أنها مجموع الطاقة الحركية E_c والطاقة الكامنة E_p:

$$E_M = E_c + E_p$$

في حالة القوى المحافظة فقط، تكون الطاقة الميكانيكية محفوظة:

$$E_M = \text{ثابت} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_M = 0 \qquad (59.\text{V})$$

أي أن التغير في الطاقة الميكانيكية بين أي حالتين يساوي صفرًا.
من هذا المبدأ نستنتج أن:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \qquad (60.\text{V})$$

وهذا يعني أن الزيادة في الطاقة الحركية تقابلها نقصان مساوٍ في الطاقة الكامنة، والعكس صحيح.

مثال 4

تطبيق: السقوط الحر

لنأخذ مثال الجسم في سقوط حر (خاضع لثقله فقط). عند إطلاق الجسم من ارتفاع معين:

- تتناقص طاقته الكامنة الثقالية $(E_p = mgh)$ كلما اقترب من الأرض.
- تزداد طاقته الحركية $(E_c = \frac{1}{2}mv^2)$ بسبب زيادة سرعته.
- لكن مجموع $E_c + E_p$ يظل ثابتًا طوال مدة السقوط.

ملاحظات 5

2.12.7 ملاحظات هامة

- مبدأ حفظ الطاقة الميكانيكية ينطبق فقط عندما تكون جميع القوى المؤثرة على الجملة قوى محافظة.
- إذا كانت الجملة معزولة ميكانيكيًا وتخضع فقط لقوى محافظة، فإن طاقتها الميكانيكية الكلية محفوظة.
- في وجود قوى غير محافظة (مثل قوى الاحتكاك)، لا تُحفظ الطاقة الميكانيكية، بل يتحول جزء منها إلى أشكال أخرى من الطاقة (كالطاقة الحرارية).

باب 8

تمارين الفصل الخامس: العمل والطاقة

1.0.8 التمرين

تؤثر قوة $\vec{F}$ في المستوى Oxy معطاة بالعلاقة:

$$\vec{F} = y\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$$

حيث $(\vec{i}, \vec{j})$ متجها الوحدة للمحورين Ox و Oy على الترتيب.
يتحرك الجسم من نقطة الأصل $O(0,0)$ إلى النقطة $P(1,2)$ على المسارات التالية:

1. المسار المستقيم OP.
2. المسار المتكسر OAP، حيث A نقطة على المحور Ox (افترض أن A هي النقطة $(1,0)$).
3. المسار على القطع المكافئ $y = 2x^2$.

المطلوب:

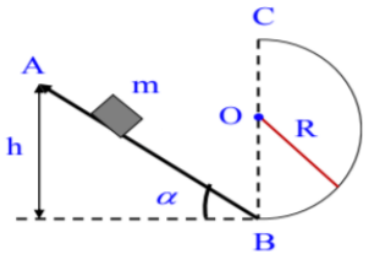
احسب العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في كل حالة من الحالات الثلاث.

الجزء الثاني:

تخضع جسيمة كتلتها m لحقل قوى:

$$\vec{F} = (-4x + y)\,\vec{i} + (x - z)\,\vec{j} \quad \text{(يجب مراجعة العبارة الأصلية)}$$

بين أن $\vec{F}$ مشتقة من طاقة كامنة E_p (أي أن $\vec{F}$ قوة محافظة).



شكل 1.8: شكل التمرين 2

2.0.8 التمرين

باستخدام مبدأ حفظ الطاقة، أوجد الشرط اللازم حتى تتمكن كتلة m من الوصول إلى النقطة C على الأقل بعد إطلاقها من النقطة A بدون سرعة ابتدائية (إهمال الاحتكاك). انظر الشكل (شكل التمرين رقم 2).

3.0.8 حل تمرين 1

1. إيجاد العمل الذي تبذله القوة $\vec{F}$ في الحالات المختلفة:

المعطيات:

$$\vec{F} = y\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}$$

والإزاحة العنصرية:

$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$

1. على المسار المستقيم OP:
معادلة المستقيم المار بالنقطتين $O(0,0)$ و $P(1,2)$ هي:

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2\,dx$$

العمل:

$$W_{OP} = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy$$

$$W_{OP} = \int y\,dx + \int 2xy\,dy = \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 2x\cdot(2x)\cdot 2\,dx$$

$$W_{OP} = \int_0^1 (2x + 8x^2)\,dx = \left[x^2 + \frac{8}{3}x^3\right]_0^1 = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}\text{J}$$

2. على المسار المتكسر OAP (حيث $A(1,0)$):
العمل الكلي هو مجموع عمل القطعتين OA و AP:

$$W_{OAP} = W_{OA} + W_{AP}$$

على القطعة OA: $y = 0$,$dy = 0$:

$$W_{OA} = \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

على القطعة AP: $x = 1$,$dx = 0$:

$$W_{AP} = \int_0^2 2xy\,dy = \int_0^2 2\cdot 1\cdot y\,dy = \left[y^2\right]_0^2 = 4\text{J}$$

إذن:

$$W_{OAP} = 0 + 4 = 4\text{J}$$

3. **على المسار القطع المكافئ** $y = 2x^2$:
هنا $dy = 4x\,dx$:

$$W_{OP} = \int_0^1 y\,dx + \int_0^1 2xy\,dy = \int_0^1 2x^2\,dx + \int_0^1 2x(2x^2)(4x)\,dx$$

$$W_{OP} = \int_0^1 (2x^2+16x^4)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{16}{5} = \frac{10}{15}+\frac{48}{15} = \frac{58}{15} \approx 3.87\text{J}$$

نلاحظ أن الأعمال الثلاثة مختلفة، وهذا يدل على أن القوة $\vec{F}$ غير محافظة (ليست مشتقة من كمون).

2. التحقق من أن قوة معطاة مشتقة من طاقة كامنة:

المعطاة:

$$\vec{F} = (-4x + y)\,\vec{i} + (x - z)\,\vec{j}$$

نحسب دوران $\vec{F}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -4x+y & x-z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-4x+y)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(x-z)}{\partial x} - \frac{\partial(-4x+y)}{\partial y}\right)$$

$$= \vec{i}(0-(-1)) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(1-1) = \vec{i} \neq \vec{0}$$

بما أن الدوران ليس صفراً، فإن $\vec{F}$ ليست قوة محافظة (ليست مشتقة من كمون).

4.0.8 حل تمرين 2

الشرط للوصول إلى النقطة C:

لكي تصل الكتلة m إلى النقطة C (أعلى المسار النصف دائري) يجب أن يبقى رد الفعل $N_C \geq 0$.

إيجاد رد الفعل N **في أي نقطة على المسار النصف دائري:**

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على الاتجاه العمودي:

$$P\cos\theta + N = m\frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + \frac{mV^2}{R}$$

باستخدام حفظ الطاقة الميكانيكية:

بين النقطة A (الارتفاع h) والنقطة M (الزاوية θ):

$$E_M(A) = E_M(M)$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

بما أن $V_A = 0$:

$$\frac{1}{2}mV_M^2 = mg[h - R(1-\cos\theta)]$$

$$\Rightarrow V_M^2 = 2g[h - R(1-\cos\theta)]$$

عبارة رد الفعل:

$$N = mg\cos\theta + \frac{m}{R}\cdot 2g[h - R(1-\cos\theta)]$$

$$= mg\left[\cos\theta + \frac{2}{R}(h-R) + 2\cos\theta\right]$$

$$= mg\left[3\cos\theta + \frac{2}{R}(h-R)\right]$$

الشرط عند النقطة C $(\theta = \pi)$:

$$N_C = mg\left[3(-1) + \frac{2}{R}(h-R)\right] = mg\left[-3 + \frac{2}{R}(h-R)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{R}(h-R) \geq 3$$

$$\Rightarrow h - R \geq \frac{3R}{2}$$

$$\Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$