

Le Dipôle Électrostatique – Cours d'électrostatique

Le Dipôle Électrostatique

1 - INTRODUCTION

Un dipôle électrostatique se définit par une répartition particulière de charges électriques telles que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives (le système est globalement neutre). Le dipôle le plus simple est donc un couple de deux charges de signe opposé distantes d'une longueur a non nulle. Cette notion est principalement utilisée en électromagnétisme et par suite en chimie où certaines liaisons entre molécules peuvent être expliquées en modélisant ces molécules par un dipôle (liaison hydrogène par exemple). En physique, on s'intéresse au champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé en un point r éloigné du dipôle (on parle alors de dipôle actif). Mais on peut aussi étudier le comportement du dipôle lorsqu'il est placé dans un champ extérieur (on parle alors de dipôle passif).

2 - POTENTIEL ET CHAMP ELECTROSTATIQUES CREES PAR UN DIPOLE ISOLE

2.1 - Définition

Le dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges électriques égales et de signes contraires $(-q)$ et $(+q)$ ($q > 0$), (figure 1). Ces deux charges sont fixées respectivement en deux points A et B séparées d'une distance $(a = \|\vec{AB}\|)$. On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatique créés par ces deux charges en un point M très éloigné des charges : $a \ll r = \|\vec{OM}\|$: approximation dipolaire.

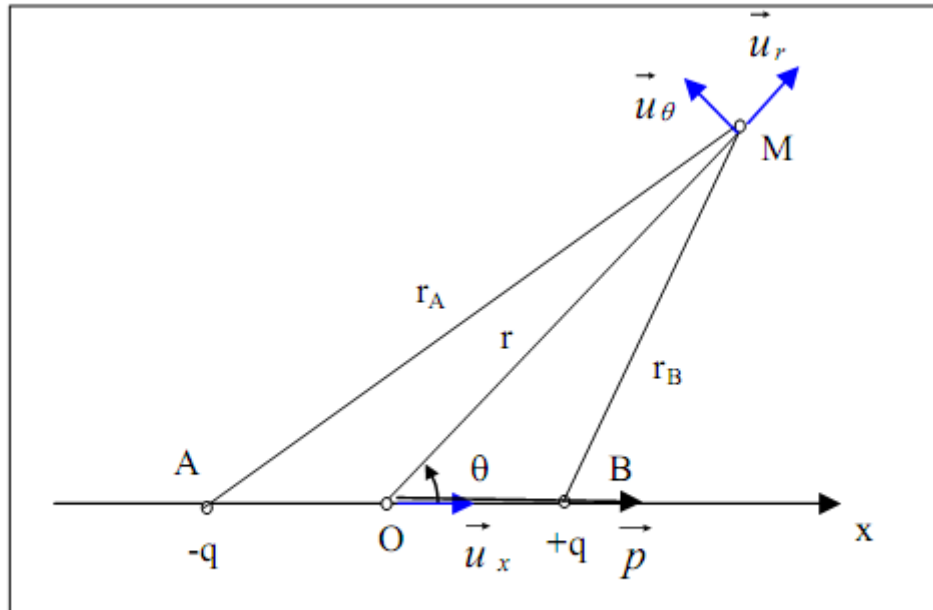


Figure 1

2.2 - Moment dipolaires électriques

Soient deux charges ponctuelles $-q$, $+q$ fixées respectivement en A et B ($q > 0$). Le moment dipolaire électrique (ou moment du dipôle) est une grandeur vectorielle définie par (figure 1):

$$\vec{p} = -q\vec{OA} + q\vec{OB} = q\vec{AB}$$

En désignant par a la distance séparant A et B, la norme du moment dipolaire vaut :

$$p = \|\vec{p}\| = qa$$

Le moment dipolaire décrit la charge et sa géométrie. Il permet de caractériser le dipôle. Son unité dans le système International (SI) est le Coulomb-mètre (C m).

2.3 - Calcul du potentiel électrostatique

Soient deux charges ponctuelles $-q, +q$ fixées respectivement en A et B (figure 1) distant de (a). Considérons un point M très éloigné des charges, ce qui revient à considérer la distance a très inférieure à celle qui sépare M de l'une ou l'autre charge (la distance a est agrandie pour des raisons de clarté).

La position de M est repérée dans le système des coordonnées polaires (r, θ). Nous choisissons de prendre pour axe (Ox), la droite qui joint les deux charges tel que l'origine O soit au milieu du segment AB qui joint les charges (Ox es l'axe de révolution de la distribution).

D'après le principe de superposition, le potentiel V(M) créé par le dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (r_B^{-1} - r_A^{-1})$$

avec,

$$* r_B = \|\overrightarrow{BM}\|$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_B^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{BO}^2 + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2$$

$$\text{où, } \|\overrightarrow{OM}\| = r ; \|\overrightarrow{OB}\| = \frac{a}{2} \text{ et } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos(\pi - \theta) = -\frac{ar}{2} \cos \theta$$

on a :

$$r_B^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 = r^2 - ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$* r_A = \|\overrightarrow{AM}\|$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$$

$$r_A^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA}^2$$

$$\text{où, } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{ar}{2} \cos \theta \text{ et } \|\overrightarrow{OA}\| = \frac{a}{2}$$

Ainsi,

$$r_A^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = r^2 + ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)$$

Nous avons donc,

$$r_A = \|\overrightarrow{AM}\| = r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

$$r_B = \|\overrightarrow{BM}\| = r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad r_B^{-1} = r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{-1/2}$$

Puisque $a/r \ll 1$, on a : $a^2/(4r^2) \ll a/r$, on peut négliger les termes en $(a/r)^2$ devant le terme en (a/r) :

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right)^{-1/2}$$

$$r_B^{-1} \cong r^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right)^{-1/2}$$

Etant donné que $a \ll r$, on peut développer r_A^{-1} et r_B^{-1} en puissance de (a/r) et ne

retenir que le terme du premier ordre $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$

$$r_A^{-1} \cong r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$\text{et } r_B^{-1} \cong r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

d'où :

$$r_B^{-1} - r_A^{-1} = r^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right) - r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos \theta \right) = \frac{a}{r^2} \cos \theta$$

Le potentiel $V(M)$ est donc donné par :

$$V(M) = \frac{qa \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M par rapport au point O (milieu de [A, B]) et $\vec{p}$ le moment dipolaire (figure 2).

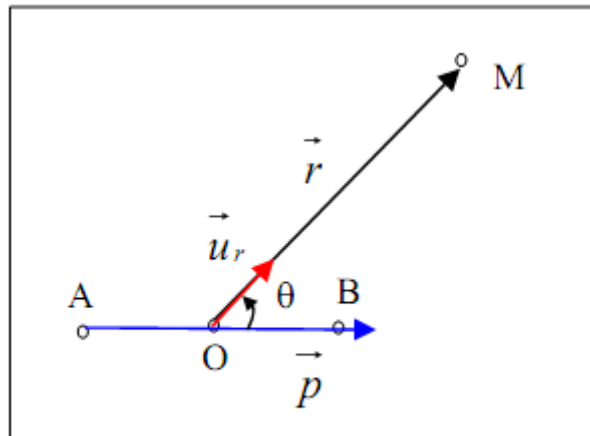


Figure 2

On a :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta$$

Le potentiel $V(M)$ s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

Cette expression qui fait intervenir un produit scalaire est indépendante de tout système de coordonnées. Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en créant par un dipôle ($1/r^2$) est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en ($1/r$).

2.4 - Calcul du champ électrostatique

2.4.1 - Composantes du champ en coordonnées polaires

Le dipôle présente une symétrie de révolution autour de (AB). Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est donc contenu dans le plan (M, AB) (figure 3).

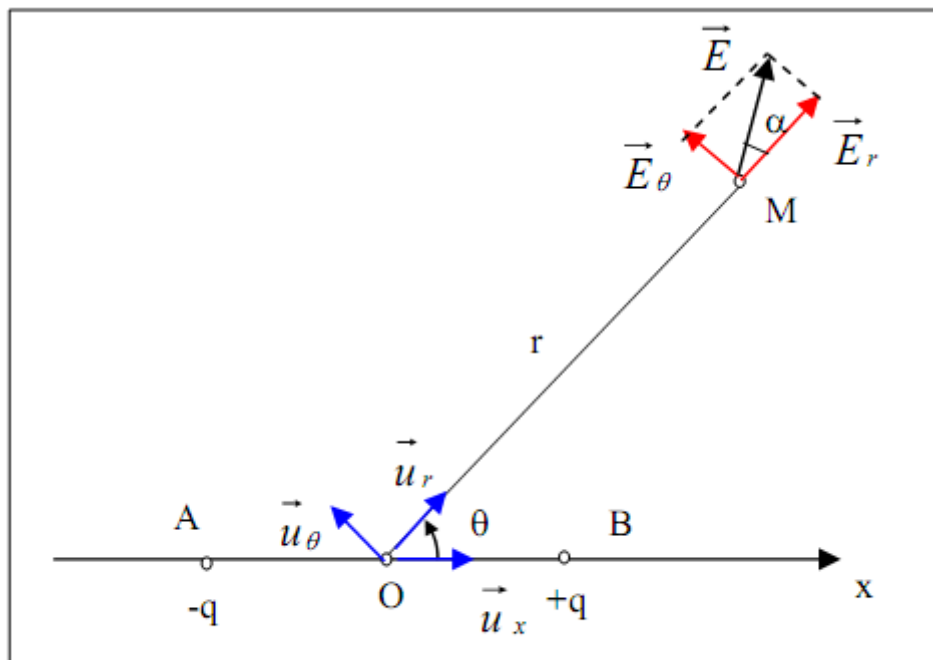


Figure 3

D'après le principe de superposition, le champ en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \quad (\vec{E}_z = \vec{0})$$

Pour calculer les composantes du champ, utilisons la relation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V}(M)$$

avec, $\overrightarrow{\text{grad}V}(M) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ et $V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

Les composantes du champ dérivant du potentiel V(M) s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{2p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

θ	0	$\Pi/2$	Π	$3\Pi/2$
$\vec{E}_r$	$\vec{E}_1 = \frac{2p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^3}$	$\vec{E}_r = \vec{0}$	$\vec{E}_3 = \vec{E}_r = \vec{E}_1$	$\vec{E}_r = \vec{0}$
$\vec{E}_\theta$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_2 = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{u}_\theta}{r^3}$ $E_2 = E_1/2$	$\vec{E}_\theta = \vec{0}$	$\vec{E}_4 = \vec{E}_2$

Il faut remarquer que la décroissance du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle qui est en $(1/r^2)$.

Le module de $\vec{E}(M)$ est :

$$\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$$

Soit α l'angle que fait $\vec{E}$ avec la radiale : $\alpha = (\vec{E}, \vec{u}_r)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2}$$

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{E} &= \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \frac{p \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ \vec{E} &= \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \vec{i} + \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (3 \sin \theta \cos \theta) \vec{j}\end{aligned}$$

2.4.2 - Formulation globale du champ $\vec{E}$

Nous pouvons exprimer $\vec{E}$ uniquement en fonction de $\vec{p}$ et de $\vec{r}$ en calculant le gradient de $V(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right)$$

Or,

En posant : $\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$ et $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

$$* \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k} = \vec{p}$$

$$* \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^5} \vec{r}$$

D'où l'expression intrinsèque de $\vec{E}$ en fonction de $\vec{p}$ et de $\vec{r}$:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \quad (5)$$

Les effets électriques $\vec{E}$ et V produits par le dipôle sont entièrement déterminés par son moment dipolaire $\vec{p}$. Il faut remarquer que la décroissance du potentiel en $(1/r^2)$ et du champ en $(1/r^3)$ créés par un dipôle est plus rapide que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) peuvent être également obtenues en écrivant :

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta ; \vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{p} = p \vec{i}$$

Ce qui donne d'après l'expression intrinsèque du champ indépendante du système de coordonnées :

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3pr \cos \theta}{r^5} (r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j}) - \frac{p}{r^3} \vec{i} \right)$$

On retrouve donc les composantes calculer à partir des composantes polaires du champ :

$$\vec{E}_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \vec{i} \text{ et } \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \sin \theta \cos \theta) \vec{j}$$

3 - ACTION D'UN CHAMP EXTÉRIEUR UNIFORME SUR UN DIPÔLE

Considérons un dipôle A(-q) et B(+q) de moment $\vec{p}$ placé dans un champ uniforme $\vec{E}_0$ et tel que $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0)$ (figure 4).

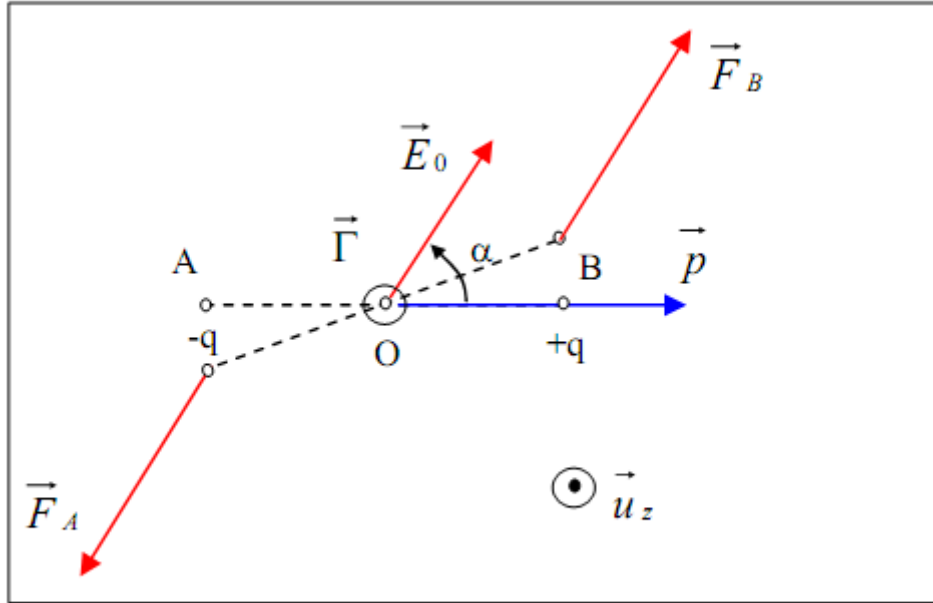


Figure 4

3.1 - Forces et moment du couple exercés par un dipôle

Chacune des charges subit une force donnée par :

$$\vec{F}_A = -q\vec{E}_0 \text{ et } \vec{F}_B = q\vec{E}_0$$

Puisque le champ extérieur est uniforme, la résultante des forces est évidemment nulle (on ne tiendra pas compte de la force exercée par q sur -q et réciproquement) :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

Par contre, le dipôle subit un couple de force ($\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$) dont le moment est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{OA} \wedge (-\vec{F}_B) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = q\vec{AB} \wedge \vec{E}_0$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0 = \|\vec{p}\| \|\vec{E}_0\| \sin \alpha \vec{u}_z \quad (6)$$

avec, $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de la direction $(z'z)$ du repère $(Oxyz)$. $\vec{\Gamma}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$.

Si on libère le dipôle, il tend sous l'action de $\vec{\Gamma}$ à tourner pour atteindre une position d'équilibre ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$) dans laquelle $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ sont colinéaires :

$$\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0) = 0 \text{ ou } \Pi$$

- Pour $\alpha=0$ ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position (figure 5-a). L'équilibre est stable.

- Pour $\alpha=\Pi$ ($\vec{p}$ est antiparallèle à $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position (figure 5-b). L'équilibre est instable.

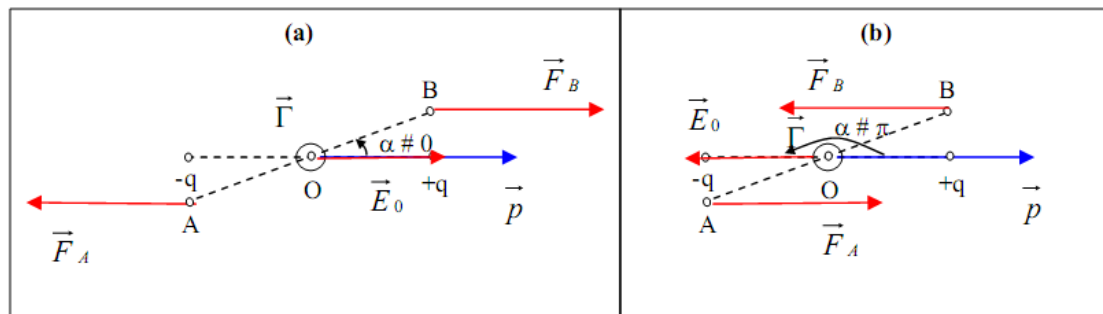


Figure 5

Ainsi, l'action mécanique principale d'un champ uniforme est qu'il tend à orienter le dipôle suivant les lignes du champ $\vec{E}_0$.

3.2 - Energie potentielle d'interaction du dipôle

C'est l'énergie nécessaire pour amener $+q$ et $-q$ de l'infini à leur position en B et A. Les charges $-q$ et $+q$ fixées en A et B ont des énergies potentielles égales à

$-q(V'_A - 0)$ et $q(V'_B - 0)$. Ainsi, l'énergie potentielle d'interaction W associée au champ extérieur $\vec{E}_0$ est :

$$W = q(V'_B - V'_A)$$

Soit V' le potentiel dont dérive le champ $\vec{E}_0$.

$$dV' = -\vec{E}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$V'_A - V'_B = -\int_A^B dV' = \int_A^B \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = E_0 \cos \alpha \int_A^B dr = E_0 \cos \alpha a = \vec{E}_0 \cdot \vec{AB}$$

Ainsi,

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 = -pE_0 \cos \alpha \quad (7)$$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ $\vec{E}_0$ et n'a rien à voir avec l'énergie de interne du dipôle (énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre). Nous retrouvons les positions d'équilibre :

- Pour $0 = \alpha$ ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}_0$), $W = -pE_0$

L'énergie potentielle est minimale et l'équilibre est stable.

- Pour $\Pi = \alpha$ ($\vec{p}$ est antiparallèle à $\vec{E}_0$), $W = pE_0$

L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre instable.

4 - Conclusion

Le champ créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire est proportionnel à $1/r^3$ et le potentiel à $1/r^2$, alors que pour une charge ponctuelle, le champ créé est proportionnel à $1/r^2$ et le potentiel à $1/r$.

LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE

