

Exercices résolus – Turbomachines axiales

Triangles des vitesses et calcul des angles

Convention à suivre (vitesse absolue et relative)

On adopte la convention suivante :

— C_a : composante **axiale** de la vitesse **absolue** $\vec{C}$ (souvent supposée constante).

— C_u : composante **tangentielle** (ou tourbillonnaire) de la vitesse **absolue** $\vec{C}$.

— U : vitesse périphérique de la roue (rotor), $U = \omega r = \frac{2\pi r N}{60}$.

— $\vec{W}$: vitesse **relative** (dans le repère mobile), $\vec{W} = \vec{C} - \vec{U}$.

— W_u : composante tangentielle de $\vec{W}$, donnée par $W_u = C_u - U$.

Les angles sont mesurés par rapport à la direction axiale :

$$\tan \alpha = \frac{C_u}{C_a}, \quad \tan \beta = \frac{W_u}{C_a} = \frac{C_u - U}{C_a}.$$

Le travail spécifique (équation d'Euler) s'écrit :

$$\Delta h_0 = U (C_{u2} - C_{u1})$$

(*positif* pour un compresseur/ventilateur lorsque $C_{u2} > C_{u1}$; *négatif* pour une turbine si l'on garde la même convention de signe).

Exercice 1 – Compresseur axial (angles et travail)

Données (au rayon moyen) :

$$N = 9000 \text{ tr/min}, \quad r = 0.25 \text{ m}, \quad C_a = 150 \text{ m/s}, \quad \alpha_1 = 20^\circ, \quad \beta_2 = 30^\circ.$$

À déterminer : U , C_{u1} , β_1 , C_{u2} , α_2 , Δh_0 .

Solution

1) Vitesse périphérique

$$U = \frac{2\pi r N}{60} = \frac{2\pi(0.25)(9000)}{60} = 235.62 \text{ m/s}.$$

2) Entrée rotor : calcul de C_{u1}

$$\tan \alpha_1 = \frac{C_{u1}}{C_a} \Rightarrow C_{u1} = C_a \tan \alpha_1 = 150 \tan 20^\circ = 54.60 \text{ m/s}.$$

3) Angle relatif à l'entrée β_1

$$\tan \beta_1 = \frac{C_{u1} - U}{C_a} = \frac{54.60 - 235.62}{150} = -1.2068 \Rightarrow \beta_1 \simeq -50.35^\circ.$$

4) Sortie rotor : calcul de C_{u2} à partir de β_2

$$\tan \beta_2 = \frac{C_{u2} - U}{C_a} \Rightarrow C_{u2} = U + C_a \tan \beta_2 = 235.62 + 150 \tan 30^\circ = 322.22 \text{ m/s.}$$

5) Angle absolu en sortie α_2

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{C_{u2}}{C_a}\right) = \arctan\left(\frac{322.22}{150}\right) \simeq 65.05^\circ.$$

6) Travail spécifique (Euler)

$$\Delta h_0 = U(C_{u2} - C_{u1}) = 235.62(322.22 - 54.60) = 63\,011 \text{ J/kg} \simeq 63.0 \text{ kJ/kg.}$$

Exercice 2 – Turbine axiale (triangles et travail extrait)

Données (rayon moyen) :

$$U = 300 \text{ m/s}, \quad C_a = 200 \text{ m/s}, \quad \alpha_1 = 60^\circ, \quad \alpha_2 = -20^\circ.$$

À déterminer : C_{u1} , C_{u2} , β_1 , β_2 , Δh_0 .

Solution

1) Composantes tourbillonnaires C_{u1} et C_{u2}

$$C_{u1} = C_a \tan \alpha_1 = 200 \tan 60^\circ = 346.41 \text{ m/s},$$

$$C_{u2} = C_a \tan \alpha_2 = 200 \tan(-20^\circ) = -72.79 \text{ m/s.}$$

2) Angles relatifs β_1 et β_2

$$\tan \beta_1 = \frac{C_{u1} - U}{C_a} = \frac{346.41 - 300}{200} = 0.2321 \Rightarrow \beta_1 \simeq 13.06^\circ,$$

$$\tan \beta_2 = \frac{C_{u2} - U}{C_a} = \frac{-72.79 - 300}{200} = -1.8639 \Rightarrow \beta_2 \simeq -61.79^\circ.$$

3) Travail spécifique (Euler)

$$\Delta h_0 = U(C_{u2} - C_{u1}) = 300(-72.79 - 346.41) = -125\,761 \text{ J/kg.}$$

Le signe négatif indique un **travail extrait** par la turbine (selon la convention $\Delta h_0 = U(C_{u2} - C_{u1})$). En valeur absolue :

$$|\Delta h_0| \simeq 125.76 \text{ kJ/kg.}$$

Exercice 3 – Design rapide par coefficients ϕ et ψ (ventilateur axial)

Données (rayon moyen) :

$$N = 3000 \text{ tr/min}, \quad r = 0.20 \text{ m}, \quad \phi = \frac{C_a}{U} = 0.6, \quad \psi = \frac{\Delta h_0}{U^2} = 0.4, \quad C_{u1} = 0.$$

À déterminer : U , C_a , Δh_0 , C_{u2} , α_2 , β_1 , β_2 .

Solution

1) Vitesse périphérique

$$U = \frac{2\pi r N}{60} = \frac{2\pi(0.20)(3000)}{60} = 62.83 \text{ m/s.}$$

2) Vitesse axiale

$$C_a = \phi U = 0.6 \times 62.83 = 37.70 \text{ m/s.}$$

3) Travail spécifique

$$\Delta h_0 = \psi U^2 = 0.4(62.83)^2 = 1579.1 \text{ J/kg.}$$

4) Calcul de C_{u2} (Euler avec $C_{u1} = 0$)

$$\Delta h_0 = U(C_{u2} - C_{u1}) = UC_{u2} \Rightarrow C_{u2} = \frac{\Delta h_0}{U} = \frac{1579.1}{62.83} = 25.13 \text{ m/s.}$$

5) Angles en sortie et au rotor

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{C_{u2}}{C_a}\right) = \arctan\left(\frac{25.13}{37.70}\right) \simeq 33.69^\circ,$$

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{C_{u1} - U}{C_a}\right) = \arctan\left(\frac{-62.83}{37.70}\right) \simeq -59.04^\circ,$$

$$\beta_2 = \arctan\left(\frac{C_{u2} - U}{C_a}\right) = \arctan\left(\frac{25.13 - 62.83}{37.70}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ.$$

Remarque pédagogique

Dans tous les exercices, la clé est d'identifier :

$$C_u = C_a \tan \alpha, \quad W_u = C_u - U, \quad \tan \beta = \frac{W_u}{C_a}.$$

Une fois C_{u1} et C_{u2} déterminés, l'équation d'Euler donne directement le travail spécifique.