المدرسة العليا للأساتذة ـ جامعة ميلة
مسار أستاذ التعليم الإبتدائي
رياضيات قاعدية 1
الدرس 7 : الأشعة في المستوي

1 مفهوم شعاع

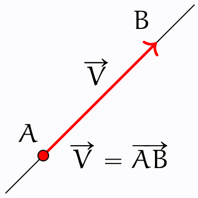
تعريف

A و B نقطتين من المستوي ، نقول أن الثنائية $(A;B)$ تعين شعاعا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{v}$

✍ إذا كانت النقطة A منطبقة على B فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يصبح معدوم و نكتب $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

✍ يسمى طول قطعة المستقيم $[AB]$ طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

✍ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ شعاعا غير معدوم فإن منحى هذا الشعاع هو منحنى المستقيم (AB)

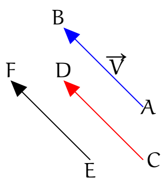


ملاحظة هامّة : ليس للشعاع المعدوم منحنى

2 تساوي شعاعين

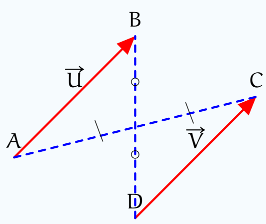
تعريف

يتساوى شعاعين إذا وفقط إذا كان لهما نفس المنحنى او نفس لاتجاه و نفس الطويلة.

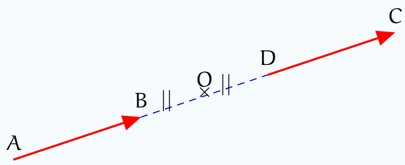


نتيجة

من أجل كل أربع نقاط A ، B ، C و D من المستوي لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه : $[AC]$ و $[DB]$ لهما نفس المنتصف و نميز حالتين :



إذا كانت النقط A، B، C و D ليست في إستقامية فالرباعي ABCD متوازي أضلاع



إذا كانت النقط A، B، C و D في إستقامية

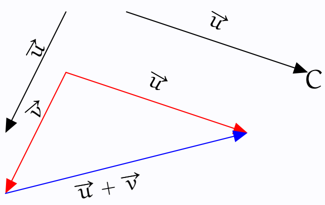
1 مجموع شعاعين

تعريف

مجموع شعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ و المعرف كما يلي :

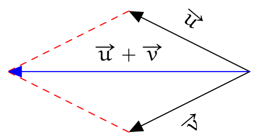
بفرض نقطة A نقطة كيفية، نعلم النقطة B بحيث : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ ثم النقطة C

بحيث : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v}$ عندئذ يكون : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$



- من أجل كل ثلاث نقاط A ، B و C من المستوي فإن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (تسمى هذه العلاقة علاقة شال)

- إذا مثلنا الشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ من نفس المبدأ A (مثلا $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$) فإن مجموعهما $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ يساوي $\overrightarrow{AD}$ حيث: ABDC متوازي الأضلاع .



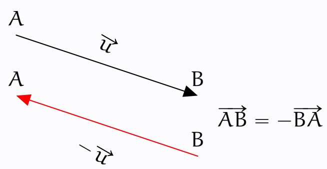
- إذا كان ABDC متوازي أضلاع فإن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

2 الشعاعين المتعاكسين

من أجل كل نقطتين A و B من المستوي فإن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

تعريف

نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ أنهما متعاكسان و نكتب :
$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

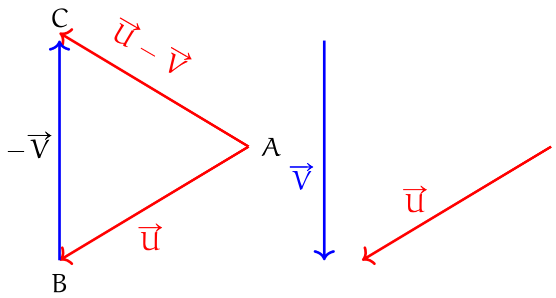


تعريف

لحساب فرق شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بهذا الترتيب ، نضيف إلى الشعاع $\vec{u}$ معاكس الشعاع $\vec{v}$ و نكتب :
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

مثال

ليكن $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$ لدينا:
$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



تطبيق

A ، B ، C و D أربع نقاط من المستوي .

1. بين أن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
2. بين أن : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$
3. لتكن I منتصف [BC]
   - بين أنه من أجل كل نقطة M فإن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$
   - بين أن: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1 جداء شعاع بعدد حقيقي

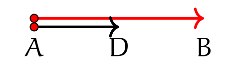
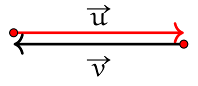
تعريف

$\overrightarrow{u}$ شعاع غير معدوم و k عدد حقيقي غير معدوم .

جداء الشعاع $\overrightarrow{u}$ بالعدد k هو الشعاع الذي نرمز له بالرمز $k\overrightarrow{u}$ و المعرف كما يأتي :

- $\overrightarrow{u}$ و $k\overrightarrow{u}$ لهما نفس المنحى و نفس الاتجاه إذا كان $k > 0$.
- $\overrightarrow{u}$ و $k\overrightarrow{u}$ لهما نفس المنحى و اتجاهان متعاكسان إذا كان $k < 0$.
- طويلة الشعاع $k\overrightarrow{u}$ تساوي جداء طويلة $\overrightarrow{u}$ بالعدد $|k|$ أي : $\|k\overrightarrow{u}\| = |k|\|\overrightarrow{u}\|$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ معناه $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ أو $k = 0$.

مثال

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
		

خواص:

$\overrightarrow{u}$ ، $\overrightarrow{v}$ شعاعان و k و k' عددان حقيقيان .

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ يكافئ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ أو $k = 0$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$

مثال

$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$ ، $(-3 + 7)\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{u} + 7\overrightarrow{v}$

2 التوازي و الإستقامية

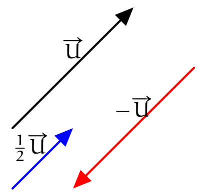
❶ الإرتباط الخطي:

تعريف

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطيا إذا كان أحدهما يساوي جداء الأخر بعدد حقيقي ،أي إذا وجد عدد حقيقي k حيث : $\vec{v} = k\vec{u}$

ملاحظة

- الشعاع المعدوم مرتبط خطيا مع أي شعاع ، من أجل كل شعاع $\vec{u}$ لدينا : $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$
- يكون شعاعان غير معدومين مرتبطين خطيا إذا و فقط إذا كان لهما نفس المنحى .



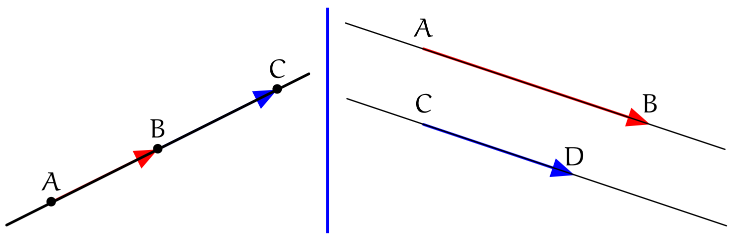
❷ التوازي و الإستقامية:

مبرهنة

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا.

مبرهنة

تكون النقط A ، B و C في إستقامية إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا



تطبيق

ABC مثلث كيفي

1. أنشئ النقطتين D و E بحيث $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$
2. بين أن النقط A ، B و E في إستقامية
3. بين أن : $(ED) \parallel (BC)$
4. عبر عن $\overrightarrow{ED}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$

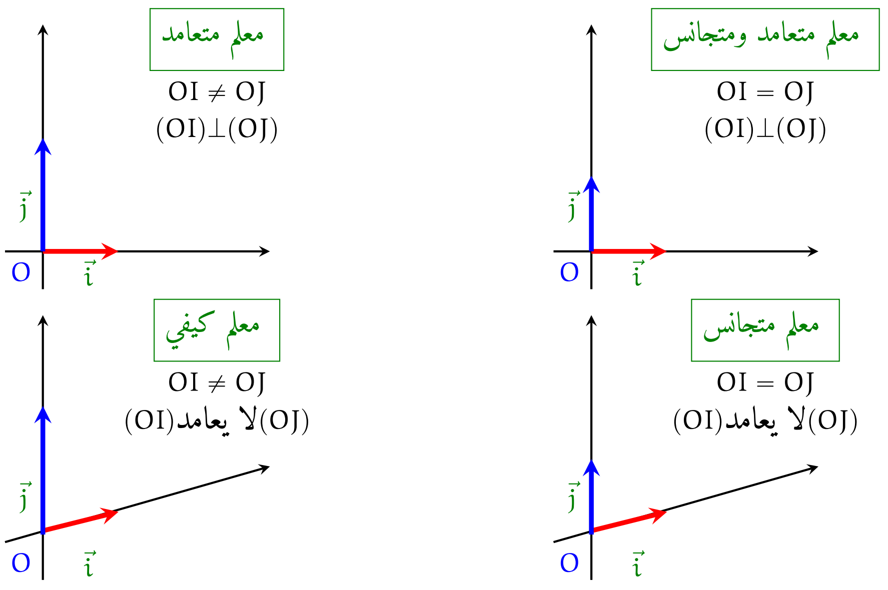
1 المعلم للمستوي

تعريف

O ، I و J ثلاث نقط متمايزة من المستوي و ليست في استقامية.

- نقول أن النقط O ، I و J بهذا الترتيب تعين معلما للمستوي مبدؤه O
- نضع $\vec{OI} = \vec{i}$ و $\vec{OJ} = \vec{j}$ حيث $\vec{i}$ و $\vec{j}$ غير مرتبطين خطيا نسميهما أشعة الأساس
- نرمز للمعلم بـ : $(O,\vec{i},\vec{j})$ و نسمي (OI) محور الفواصل و (OJ) محور التراتيب

2 أنواع المعالم



3 إحداثيا نقطة-مركبتا شعاع

مبرهنة

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي .

من أجل كل نقطة M من المستوي ،توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقية (x,y) بحيث $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$

من أجل كل شعاع $\vec{u}$ ، توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الحقيقية (x,y) بحيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$

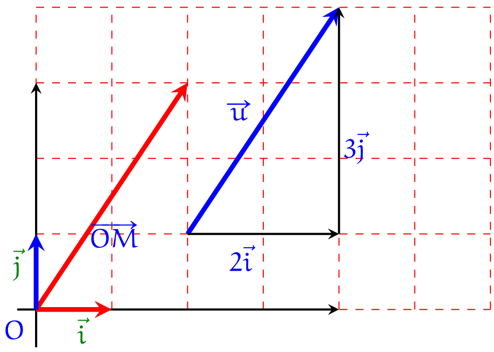
مثال

من الشكل المقابل

النقطة M إحداثياها هي $(2;3)$

الشعاع $\overrightarrow{OM}$ مركباته هي $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

لدينا $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ ومنه مركبات الشعاع $\vec{u}$ هي $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$



حساب إحداثيتي شعاع و إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم :

مبرهنة

لتكن $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

إحداثيا النقطة M منتصف $[AB]$ هما $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

نتائج :

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم لمستوي ، و $\vec{u}$ شعاع إحداثياه $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، و $\vec{v}$ شعاع إحداثياه $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ، و k عدد حقيقي .

- تساوي شعاعين $\vec{v}=\vec{u}$ معناه $(y=y'$ و $x=x')$
- مجموع شعاعين مركبتي المجموع $\vec{v}+\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- جداء عدد بشعاع مركبتي الشعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

شرط الإرتباط الخطي لشعاعين :

مبرهنة

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم لمستوي ، و $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ شعاعين منه .

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان : $xy'-x'y=0$

مثال

الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ، و $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا لأن $2\times(-3)+1\times(-6)=0$

❶ شعاع توجيه مستقيم:

تعريف

$\vec{v}$ شعاع غير معدوم من المستوي، A نقطة من المستوي
مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحث : $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا هي مستقيم (Δ) يوازي منحي $\vec{v}$
الشعاع $\vec{v}$ يسمى "شعاع توجيه للمستقيم (Δ)"

ملاحظات

1. إذا كان $\vec{v}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) فإن كل شعاع $\vec{u} = k\vec{v}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ هو كذلك شعاع توجيه لـ (Δ) (لكل مستقيم من المستوي عدد غير منته من أشعة التوجيه)
2. نعين مستقيما من المستوي بإعطاء نقطتين منه أو بإعطاء نقطة منه و شعاع توجيهه

❷ معادلة مستقيم:

مبرهنة

ينسب المستوي إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$
كل مستقيم له معادلة من الشكل $ax + by + c = 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية معلومة، x و y متغيران حقيقيان، شعاع توجيهه هو $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
a ، b و c أعداد حقيقية معلومة حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$ مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق المعادلة $ax + by + c = 0$ هي معادلة مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

تعريف

العلاقة $ax + by + c = 0$ تسمى المعادلة الديكارتية للمستقيم الذي $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

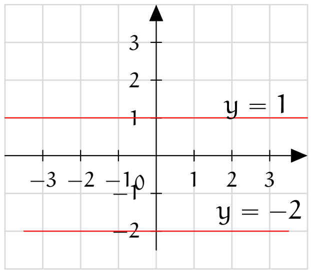
مثال

مجموعة النقط $M(x, y)$ التي تحقق المعادلة $2x + y - 3 = 0$ هي معادلة مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

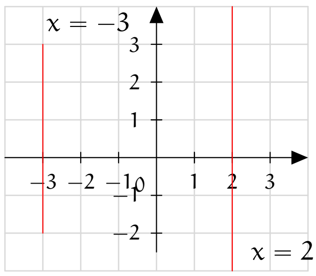
حالات خاصة:

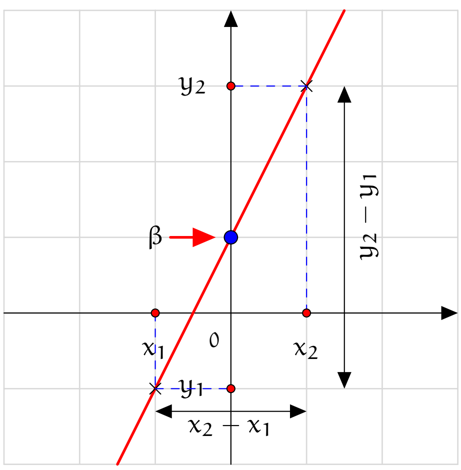
<table>
<tr>
<td>الحالةالأولى
$a=0$
و
$b\neq 0$</td>
<td>المعادلة $ax+by+c=0$ تصبح $by+c=0$ اي $y=\underbrace{-\frac{c}{b}}_{m}$

كل معادلة من الشكل $y=m$ هي معادلة لمستقيم موازي لحامل محور الفواصل شعاع توجيهه هو : $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\0\end{pmatrix}$.


</td>
</tr>
<tr>
<td>الحالةالثانية
$a\neq 0$
و
$b=0$</td>
<td>المعادلة $ax+by+c=0$ تصبح $ax+c=0$ اي $x=\underbrace{-\frac{c}{a}}_{t}$
.

كل معادلة من الشكل $x=t$ هي معادلة لمستقيم موازي لحامل محور التراتيب شعاع توجيهه هو : $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$.


</td>
</tr>
<tr>
<td>الحالةالثالثة
$a\neq 0$
و
$b\neq 0$</td>
<td>المعادلة $ax+by+c=0$ تصبح $y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{\alpha}x\underbrace{-\frac{c}{b}}_{\beta}$ اي $y=\alpha x+\beta$ حيث كل معادلة من الشكل $y=\alpha x+\beta y$ هي معادلة لمستقيم مائل شعاع توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}$.
◂ تسمي $y=\alpha x+\beta y$ المعادلة المختصرة للمستقيم حيث α معامل توجيه المستقيم يحسب كالتالي : $\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
◂ β هي ترتيب نقطة تقاطع المستقيم مع حامل محور التراتيب.


</td>
</tr>
</table>

شرط توازي مستقيمين :

مبرهنة

(D) و (D') مستقيمان من المستوي معادلتهما $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ على الترتيب
$(D) \parallel (D')$ يكافئ $ab' = a'b$

مبرهنة

(D) و (D') مستقيمان من المستوي معادلتهما $y = \alpha x + \beta$ و $y = \alpha' x + \beta'$ على الترتيب
$(D) \parallel (D')$ يكافئ $\alpha = \alpha'$

مثال

المستقيمان $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$ و $(\Delta') : -4x + 6y + 1 = 0$ متوازيان لأن $2 \times 6 = (-3) \times (-4)$
المستقيمان $(\Delta) : y = -x + 3$ و $(\Delta') : y = -x - 1$ متوازيان لأن لهما نفس معامل التوجيه (-1)

تطبيق

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$، m عدد حقيقي يختلف عن 2، نعتبر المستقيم (Δ_m) المعرف ديكارتيا كما يلي :

$$(m - 2)x + (m^2 - 4)y + 1 = 0$$

1. عين معادلة لكل من (Δ_1) و (Δ_2)
2. أوجد قيم m حتى تكون النقطة $A(2; 1)$ نقطة من المستقيم (Δ_m)
3. ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و يوازي المستقيم (Δ_1)
   - أكتب المعادلة الديكارتية لـ (D)
   - عين قيم m بحيث يكون (D) و (Δ_m) متوازيان