حل التمرين 1 :

1.
- العنصر المحايد للجمع هو 0 والعنصر المحايد للضرب هو 1.
- العنصر المعاكس للجمع للعدد q هو $-q$ والمعاكس للضرب لكل $q \neq 0$ هو $\frac{1}{q}$.
- كل من الاعداد 0، 1، $-q$ ، $\frac{1}{q}$ تنتمي الى Q .

2. إثبات أن Q حقل :

- الانغلاق: إذا كان $a, b \in Q$ فإن $a+b \in Q$ و $ab \in Q$.
- التجميع والتبديل: عمليتا $+$ و $\times$ تجميعتان وتباديليتان على Q(لانها مجموعة جزئية من الحقل R.)
- خاصية التوزيع: $\forall a, b, c \in Q$ فإن $a(b+c) = ab + ac$.
- وجود عنصر محايد للجمع (وهو 0) وعنصر محايد للضرب (وهو 1).
- وجود معاكس للجمع لكل q، ووجود معاكس للضرب لكل $q \neq 0$.

وبالتالي Q حقل.

حل التمرين 2 :

1. بالنسبة لـ Z فإن عمليتي الجمع والضرب تحقّقان التجميع والتبديل:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad (ab)c = a(bc)$$

$$a+b = b+a, \qquad ab = ba$$

2. الانغلاق في Z:

$$a, b \in Z \Rightarrow a+b \in Z, \qquad ab \in Z$$

3. لكن ليس لكل عدد $a \neq 0$ معاكس ضربي في Z، فمثلاً:

$$2 \in Z \quad \text{لكن} \quad \frac{1}{2} \notin Z$$

4. نستنتج أن Z ليست حقلا.

حل التمرين 3:

نعتبر $2Z = \{2k \ : \ k \in Z\}$.

1. بالنسبة للضرب: العنصر المحايد هو 1، لكنه لا ينتمي إلى $2Z$ (لانه ليس عددا زوجيا)، إذا لا يوجد عنصر محايد للضرب في $2Z$.
لكل $2k \in 2Z$ فإن معاكسه بالنسبة للجمع هو -2k ، $-2k \in 2Z$.
لكل $2k \in Z$ ، معاكسه بالنسبة للضرب هو $\frac{1}{2k}$ وهو لاينتمي الى $2Z$.

1. مسلمة الانسجام (التوزيع) بين الجمع والضرب متحققة لأن العمليات هي نفس عمليات Z الموروثة.

2. لا، $2Z$ ليس حقلاً لأنه لا يحتوي على العنصر المحايد للضرب ولا يملك كل عناصره معاكسا بالنسبة للضرب.

حل التمرين 4:

نعتبر $D = \left\{ \frac{m}{2^n} \ : \ m \in Z,\ n \in N \right\}$.

1. لنأخذ $\frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}} \in D$.
بالنسبة للجمع:

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} + \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 2^{n_2} + m_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}} \in D.$$

بالنسبة للضرب:

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} \cdot \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 m_2}{2^{n_1+n_2}} \in D.$$

إذن D مغلق بالنسبة للجمع والضرب.

2. العنصر $\frac{m}{2^n}$ (مع $m \neq 0$) معاكسه بالنسبة للضرب هو: $\frac{2^n}{m}$. هذا العدد لا ينتمي إلى D إلا في حالات خاصة.
إذن لا يملك كل عنصر في D معاكسًا ضربيًا داخل D، وبالتالي D ليس حقلاً.

حل التمرين 5: نعتبر $K = \{a + b\sqrt{2} \ : \ a, b \in Q\}$.

1. العنصر المحايد للجمع هو:

$$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in K.$$

العنصر المحايد للضرب هو:

$$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in K.$$

المعاكس للجمع للعنصر $a + b\sqrt{2}$ هو:

$$-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in K.$$

2. نعتبر $x = a + b\sqrt{2} \in K$ حيث $x \neq 0$. معاكسه بالنسبة للضرب هو:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

وبما أن $a, b \in Q$ و $a^2 - 2b^2 \neq 0$، فإن:

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2},\ \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in Q.$$

إذن معاكس x ينتمي إلى K.
وبما أن مسلمات التبديل، التجميع والتوزيع متحققة، نستنتج أن K حقل.