

UNIVERSITE ABDELHAFID BOUSSOUF MILA

DEPARTEMENT MATHÉMATIQUE

Simulation avancée

Dr. Bounaira Soumaya

Date: Décembre 3, 2025

Contents

1	Introduction à la Simulations	1
1.1	Introduction	1
1.2	Systèmes	1
1.2.1	Définition	1
1.2.2	Caractéristiques d'un système.....	2
1.3	Modélisation et simulation	2
1.3.1	Modélisation	3
1.3.2	Simulation.....	3
1.3.2.1	Notion de simulation	3
1.4	Application de la simulation	4
1.5	Types de simulation	4
1.6	Étapes d'une étude de simulation.....	5
1.7	Paradigmes de simulation.....	7
1.8	Conclusion.....	7
	Bibliography	8

List of Figures

1.1	Vue générale du système complexe	2
1.2	Architecteure d'un systeme.....	4
1.3	Étapes de simulation.	6

Chapitre 4

Automates cellulaires

4.1. Introduction

4.2. Concepts fondamentaux des automates cellulaires

4.2.1. Concepts

Les automates cellulaires constituent un modèle de calcul discret basé sur l'évolution d'un ensemble de cellules organisées sur une grille. Chaque cellule possède un **état** (par exemple : 0/1, vivant/mort, couleur, etc.) et évolue au cours du temps en fonction des états de ses cellules voisines selon des règles simples mais pouvant produire des comportements très complexes.

Les composants fondamentaux d'un automate cellulaire sont :

- **La cellule** : élément de base portant un état.
- **La grille** : structure spatiale qui regroupe toutes les cellules (1D, 2D ou 3D).
- **Le voisinage** : ensemble des cellules dont l'état influence l'évolution d'une cellule donnée (ex. Von Neumann ou Moore).
- **La fonction de transition** : règle locale qui détermine le prochain état d'une cellule en fonction de son état courant et de celui de ses voisins.

Ces éléments permettent de modéliser et simuler une grande variété de phénomènes naturels ou artificiels, allant de la croissance biologique aux systèmes physiques ou sociaux.

4.2.2. Comment ça marche

À chaque étape, chaque cellule regarde les états de ses voisines et met à jour son propre état selon les règles. Cette mise à jour se fait automatiquement et peut créer des motifs intéressants. Certains automates cellulaires fonctionnent en une dimension, comme une ligne de cellules, tandis que d'autres peuvent remplir un espace en deux dimensions.

4.3. Définition formelle des automates cellulaires

Définition 1 (Automate cellulaire) *Un automate cellulaire $\mathcal{A} = (d, \mathbb{S}, \mathcal{V}, \delta)$ est la donnée de :*

1. *Sa dimension $d \in \mathbb{N}^*$, qui est la dimension de son réseau $\mathbb{Z}^d$*
2. *Un ensemble fini d'états $\mathbb{S}$, appelé alphabet*
3. *Son voisinage $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{Z}^d)^n$*
4. *Sa règle locale de transition $\delta : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}$*

Une *configuration* de l'automate $\mathcal{A}$ est une application de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{S}$: on associe à chaque cellule de l'automate un état. On note $\mathfrak{C}$ l'ensemble des configurations de $\mathcal{A}$.

Un automate cellulaire peut être considéré comme un système dynamique à temps et espace discrets en munissant $\mathfrak{C}$ de la fonction globale de transition de l'automate $\mathcal{A}$, c'est-à-dire la fonction d'évolution temporelle de la configuration. Cette fonction $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ est définie cellule par cellule par :

$$\forall \mathfrak{c} \in \mathfrak{C}, \forall \gamma \in \mathbb{Z}^d, \mathfrak{F}(\mathfrak{c})(\gamma) = \delta(\mathfrak{c}(\gamma + v_1), \dots, \mathfrak{c}(\gamma + v_n))$$

L'automate cellulaire décrit alors le système dynamique

$$\begin{cases} \mathfrak{c}_0 \in \mathfrak{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathfrak{c}_{n+1} = \mathfrak{F}(\mathfrak{c}_n) \end{cases}$$

Définition 2 *On appelle orbite d'une configuration initiale $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}$ l'ensemble des configurations prises par l'automate depuis l'état initial $\mathfrak{c}$:*

$$\mathcal{O}(\mathfrak{c}) = \{\mathfrak{F}^k(\mathfrak{c}), k \in \mathbb{N}\}$$

Exemples

Exemple 1 : Automate cellulaire simple.

Il s'agit d'un automate $A = (\mathbb{Z}^{d-1}, Q, V, \delta)$ où :

- $Q = \{0, 1\}$
- V : Les voisins d'une cellule i sont les cellules : i , $i-1$ et $i+1$ Pour simplifier ce voisinage peut être décrit par le triplet $V = (-1, 0, 1)$
- δ est une transition qui est définie par le tableau suivant :

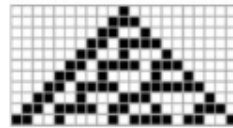
(q_1, q_2, q_3) voisinage possible de la cellule centrale	111	110	101	100	011	010	001	000
$\delta(q_1, q_2, q_3)$ Valeur suivante de la cellule centrale	0	0	0	1	1	1	1	0

Cela signifie que si par exemple, à un temps t donné, une cellule est à l'état « 1 », sa voisine de gauche à l'état « 1 » et sa voisine de droite à l'état « 0 », au temps $t+1$ elle sera à l'état « 0 ».

Il s'agit d'une grille unidimensionnelle de cellules ne pouvant prendre que deux états (« 0 » ou « 1 »), avec un voisinage constitué, pour chaque cellule, d'elle-même et des deux cellules qui lui sont adjacentes.

Chacune des cellules pouvant prendre deux états, il existe $2^3=8$ configurations (ou motifs) possibles d'un tel voisinage. Pour que l'automate cellulaire fonctionne, il faut définir quel doit être l'état, à la génération suivante, d'une cellule pour chacun de ces motifs. Il y a $2^8=256$ façons différentes de s'y prendre, soit donc 256 automates cellulaires différents de ce type.

Si l'on part d'une grille initiale où toutes les cellules sont à l'état « 0 » sauf une, on aboutit à :



où chaque ligne est le résultat de la ligne précédente.

Exercice.

Dans l'automate précédent on considère une fonction d'évolution δ décrite comme suite : $\delta(q_1, q_2, q_3) = q_1 + q_2 + q_3 \text{ modulo } 2$.

1. Décrire le tableau d'évolution de cet automate cellulaire

(q_1, q_2, q_3)	111	110	101	100	011	010	001	000
$\delta(q_1, q_2, q_3)$								

2. Si l'on part d'une grille initiale décrite ci-dessous, on veut demande de décrire 4 itérations d'évolution.

Itération	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
t=0												
t=1												
t=2												
t=3												
t=4												

4.4. Les automates cellulaires élémentaires (ACE)

Définition (ACE) On appelle automate cellulaire élémentaire tout automate $\mathcal{A} = (d, \mathbb{S}, \mathcal{V}, \delta)$ tel que :

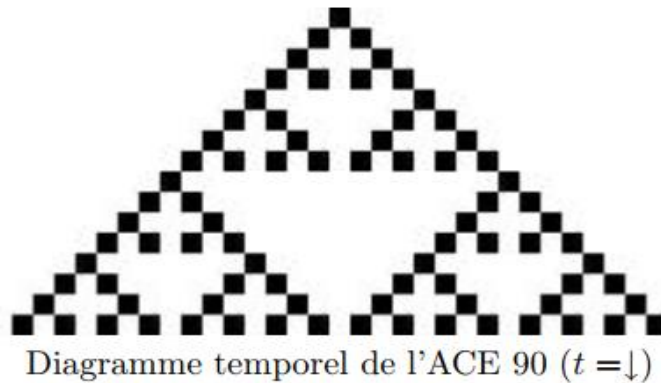
1. $d = 1$: Les cellules de l'automates correspondent à des entiers
2. $\mathbb{S} = \{\square, \blacksquare\}$: les cellules n'ont que deux états possibles
3. $\mathcal{V} = \{-1, 0, 1\}$: l'état au temps $t + 1$ d'une cellule γ dépend de l'état au temps t de γ et de ses deux voisines immédiates $\gamma + 1$ et $\gamma - 1$

La règle locale de transition d'un automate élémentaire est une fonction de $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{S}$. Comme $\mathbb{S}$ n'a que deux éléments, il n'existe que $2^8 = 256$ règles locales de transition possibles. On peut donner δ sous forme d'un tableau :

$\blacksquare\blacksquare\blacksquare$	$\blacksquare\blacksquare\square$	$\blacksquare\square\blacksquare$	$\blacksquare\square\square$	$\square\blacksquare\blacksquare$	$\square\blacksquare\square$	$\square\square\blacksquare$	$\square\square\square$
$\square$	$\blacksquare$	$\square$	$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\square$	$\blacksquare$	$\square$

Chaque règle δ peut être vue comme l'écriture binaire d'un entier entre 0 et 255. Ainsi, le tableau précédent correspond à la règle élémentaire $\overline{01011010}^2 = 90$.

Les cellules d'un ACE se répartissent sur $\mathbb{Z}$. On peut donc représenter l'évolution des configurations de l'automate dans $\mathbb{Z}^2$:



4.5. Simulation de systèmes complexes par les automates cellulaires

Les automates cellulaires sont largement utilisés pour la simulation de systèmes complexes. Il s'agit d'un modèle simplifié, dans lequel les agents obéissent à des règles locales simples, et qui comporte généralement une part d'aléa, soit dans la configuration initiale, soit dans les règles d'évolution.

Ils sont notamment employés pour la simulation :

1. du trafic routier,
2. des phénomènes de percolation, notamment l'évolution des feux de forêt,
3. de la diffusion particulaire,
4. des avalanches dans un tas de grains de sable,
5. de la désintégration de particules radioactives,
6. et bien d'autres phénomènes.

Un système physique complexe régi par des équations différentielles peut être discrétisé puis modélisé à l'aide d'un automate cellulaire (pertinent ou non selon le contexte). Un schéma numérique, tel que le schéma d'Euler, permet en effet de discrétiser une équation différentielle et de définir un modèle par automate cellulaire.

Dans de nombreux cas, les automates cellulaires permettent de capturer l'évolution qualitative du système, voire de reproduire des comportements émergents complexes, sans nécessiter une modélisation mathématique détaillée. Par ailleurs, certains modèles physiques exprimés par des équations différentielles peuvent être convertis en modèles discrets via des schémas numériques (comme le schéma d'Eulerⁱ), ce qui permet leur simulation sous forme d'automates cellulaires.

Ainsi, les automates cellulaires constituent une approche simple mais efficace pour explorer et analyser des dynamiques complexes, offrant un compromis intéressant entre réalisme, simplicité computationnelle et capacité d'observation.

ⁱ Définition et Principe

Le schéma d'Euler, nommé d'après le mathématicien Leonhard Euler, est utilisé pour approximer la solution d'une équation différentielle de la forme $y' = f(t, y)$ avec une condition initiale.

L'idée principale est d'utiliser la tangente à la courbe de la solution à un point donné pour estimer la valeur de la solution à un point voisin.