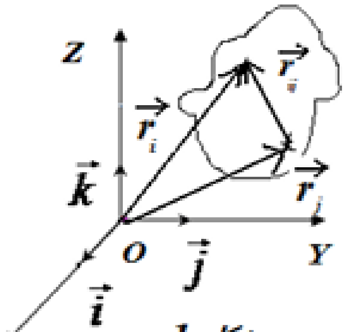
الفصل9:تحريك جسم صلب



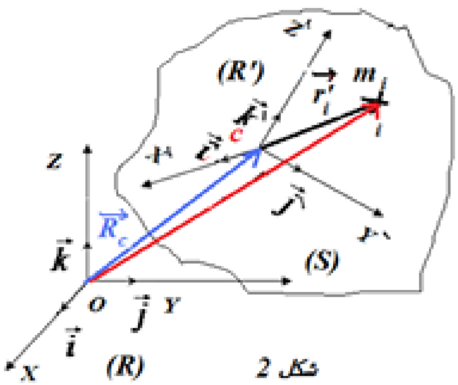
شكل 1

✓ **مقدمة:**

يعد تحريك الجسم الصلب تطبيق لتحريك جملة جسيمات، حيث يعرف الجسم الصلب على انه جملة جسيمات لا تتحرك بالنسبة لبعضها البعض اي متماسكة ، مثل: كرة او اسطوانة من الحديد، فشكلها لا يتغير مع الزمن.

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ =ثابت

✓ **حركيات الجسم الصلب:**



شكل 2

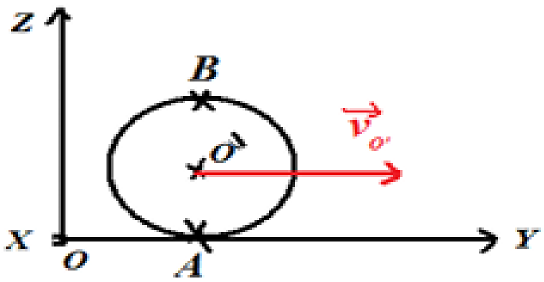
ليكن الجسم الصلب (S) في المعلم المخبري (R) ، لدراسته نستعمل معلم (R') مبدؤه مركز كتل هذا الجسم (c) . ان سرعة نقطة i من الجسم (S) هي

$$\vec{v}_i\big|_R = \vec{v}_c\big|_R + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i\big|_R$$

حيث $\vec{\omega}$ هي السرعة الزاوية لدوران الجسم الصلب (S)

- **ملاحظة:** في حالة حركة انسحابية فقط تكون $\vec{\omega} = \vec{0}$.
- في حالة حركة دورانية فقط تكون $\vec{v}_c\big|_R = \vec{0}$

✓ **مثال 1:**



شكل 3

اسطوانة نصف قطرها a تتدحرج دون انزلاق على مستو افقي (OXY) ، اذا كانت سرعة مركزها (O') هي $\vec{v}_{o'}\big|_R$. أوجد سرعة نقطة (A) ملامسة للمستو افقي (OXY) و نقطة مناظرة لها (B) .

✓ **الحل:**

بما أن التدحرج يتم دون انزلاق فان $\vec{v}_{o'} = a\omega\vec{j}$ و عليه $\omega = \dfrac{v_{o'}}{a}$.

و عليه سرعة نقطة (A) هي: $\vec{v}_A\big|_R = \vec{v}_{o'}\big|_R + \vec{\omega}\times\vec{r}'_A\big|_R = a\omega\vec{j} + (-\omega\vec{i})\times a(-\vec{k}) = a\omega\vec{j} - a\omega\vec{j} = \vec{0}$

و سرعة نقطة (B) هي: $\vec{v}_B\big|_R = \vec{v}_{o'}\big|_R + \vec{\omega}\times\vec{r}'_B\big|_R = a\omega\vec{j} + (-\omega\vec{i})\times a(\vec{k}) = a\omega\vec{j} + a\omega\vec{j} = 2a\omega\vec{j}$

1. الدفع الزاوي :ممتد العطالة

في الشكل 2 الدفع الزاوي للجسم هو: $\vec{L} = \vec{R}_c \times M\vec{V}_c + \vec{L}'$

حيث $\vec{L}'$ هو الدفع الزاوي الذاتي للجسم (أي الدفع الزاوي بالنسبة لمعلم مركز الكتل)

في حالة جسم يقوم بحركة دورانية فقط حول مركز كتلته c أي $\vec{V}_c = 0$ فان $\vec{L} = \vec{L}'$.

لنحسب الأن و في هذه الحالة $\vec{L}$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}'_i)$$

و حيث أنه يمكن كتابة :

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$$

$$\vec{r}'_i = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

و حيث أن: $\vec{r}'_i \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}'_i) = (\vec{r}'_i.\vec{r}'_i)\vec{\omega} - (\vec{r}'_i.\vec{\omega}).\vec{r}'_i = (\vec{r}'^2_i\,\vec{\omega} - (\vec{r}'_i.\vec{\omega}).\vec{r}'_i$

و عليه يمكن كتابة: $\vec{L} = \sum_i m_i\left[(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)\vec{\omega} - (x'_i\omega_x + y'_i\omega_y + z'_i\omega_z)\vec{r}'_i\right]$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i m_i\begin{bmatrix} \vec{i}\left[(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)\omega_x - (x'^2_i\omega_x + y'_i x'_i\omega_y + z'_i x'_i\omega_z)\right] \\ +\vec{j}\left[(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)\omega_y - (x'_i y'_i\omega_x + y'^2_i\omega_y + z'_i y'_i\omega_z)\right] \\ +\vec{k}\left[(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i)\omega_z - (x'_i z'_i\omega_x + y'_i z'_i\omega_y + z'^2_i\omega_z)\right] \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i m_i\begin{bmatrix} \vec{i}\left[(y'^2_i + z'^2_i)\omega_x - (y'_i x'_i\omega_y + z'_i x'_i\omega_z)\right] \\ +\vec{j}\left[(x'^2_i + z'^2_i)\omega_y - (x'_i y'_i\omega_x + z'_i y'_i\omega_z)\right] \\ +\vec{k}\left[(x'^2_i + y'^2_i)\omega_z - (x'_i z'_i\omega_x + y'_i z'_i\omega_y)\right] \end{bmatrix}$$

باستعمال حساب المصفوفات يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i(x'_i\,y'_i) & -\sum_i m_i(x'_i\,z'_i) \\ -\sum_i m_i(x'_i\,y'_i) & \sum_i m_i(x'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i(y'_i\,z'_i) \\ -\sum_i m_i((x'_i\,z'_i) & -\sum_i m_i(y'_i\,z'_i) & \sum_i m_i(x'^2_i + y'^2_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x\vec{i} \\ \omega_y\vec{j} \\ \omega_z\vec{k} \end{pmatrix}$$

و منه نستنتج العلاقة التي تربط الدفع الزاوي L بممتد العطالة I : $L = I.\vec{\omega}$

حيث: $$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i(x'_i\, y'_i) & -\sum_i m_i(x'_i\, z'_i) \\ -\sum_i m_i(x'_i\, y'_i) & \sum_i m_i(x'^2_i + z'^2_i) & -\sum_i m_i(y'_i\, z'_i) \\ -\sum_i m_i((x'_i\, z'_i) & -\sum_i m_i(y'_i\, z'_i) & \sum_i m_i(x'^2_i + y'^2_i) \end{pmatrix}$$

I على شكل مصفوفة مربعة و تدعى ممتد عزوم العطالة للجسم الصلب بالنسبة للنقطة C.

$$(I_{ij})_C = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

تدعى المقادير I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} عزوم عطالة الجسم الصلب بالنسبة للمحاور Cx', Cy', Cz' على التوالي

أما المقادير ($I_{xy}, I_{yx}\ I_{xz}, I_{zx}\ I_{yz}, I_{zx}$) فتدعى بجداءات العطالة.

ملاحظة:

باستعمال نفس الطريقة يمكن ايجاد ممتد العطالة بالنسبة للمعلم المخبري

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i(x_i y_i) & -\sum_i m_i(x_i z_i) \\ -\sum_i m_i(x_i y_i) & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i(y_i z_i) \\ -\sum_i m_i((x_i z_i) & -\sum_i m_i(y_i z_i) & \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

الجدول التالي يبين كيفية حساب عناصر ممتد العطالة في حالة اعتبار توزيع متقطع أو مستمر، (ρ يعبر عن الكتلة الحجمية للجسم الصلب و dv عن عنصر الحجم.

العبارة في النظام المستمر	العبارة في النظام المتقطع	عزم العطالة
$\int (y^2 + z^2)\rho dv$	$\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$	I_{xx}
$\int (x^2 + z^2)\rho dv$	$\sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2)$	I_{yy}
$\int (x^2 + y^2)\rho dv$	$\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$	I_{zz}
$-\int (xy)\rho dv$	$-\sum_i m_i(x_i y_i)$	$I_{xy} = I_{yx}$
$-\int (xz)\rho dv$	$-\sum_i m_i((x_i z_i)$	$I_{xz} = I_{zx}$
$-\int (yz)\rho dv$	$-\sum_i m_i(y_i z_i)$	$I_{yz} = I_{zy}$