

01 ANNEE MASTER GENIE CIVIL-STRUCTURE

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

CHAPITRE 06:

POUTRES CONTINUES SUR APPUIS ÉLASTIQUES

Introduction

Aujourd'hui le modèle de fondation le plus connu et le plus utilisé pour l'analyse de l'interaction sol-structure est celui de Winkler, (1867) (figure 6.1). En effet Winkler a défini le sol comme étant un empilement de tranches indépendantes et chaque tranche de sol est modélisée par un ressort vertical sur lequel s'appuie la fondation.

Cependant pour calculer les contraintes s'exerçant sous une fondation, Winkler a supposé que la réaction du sol exercée en chaque point sous la fondation est proportionnelle à la déflexion de la fondation. En effet la déformation verticale caractéristique de la fondation est donc définie par l'utilisation de ressorts identiques, indépendants, étroitement espacés et linéairement élastiques. La constante de proportionnalité de ces ressorts est connue sous le nom de coefficient de réaction du sol. Ce modèle est défini par la formule suivante :

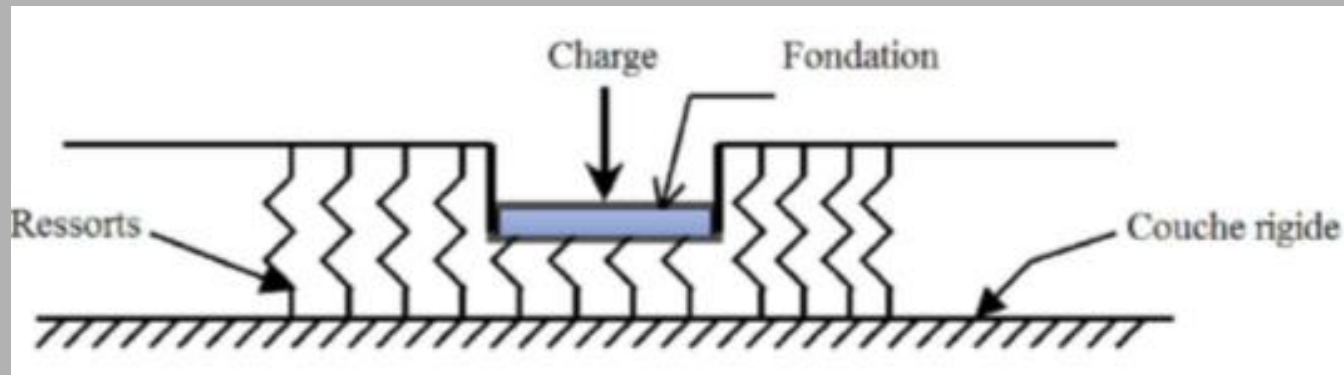


Fig.6.1. Modèle de fondation de Winkler (Seguini, 2016).

Le concept introduit en mécanique continu par Winkler a été utilisé pour la première fois par Zimmerman, (1888) (Figure 6.2) pour calculer le comportement des traverses en bois soutenant les rails et reposant sur du ballast les traverses sont assimilées à des ressorts.

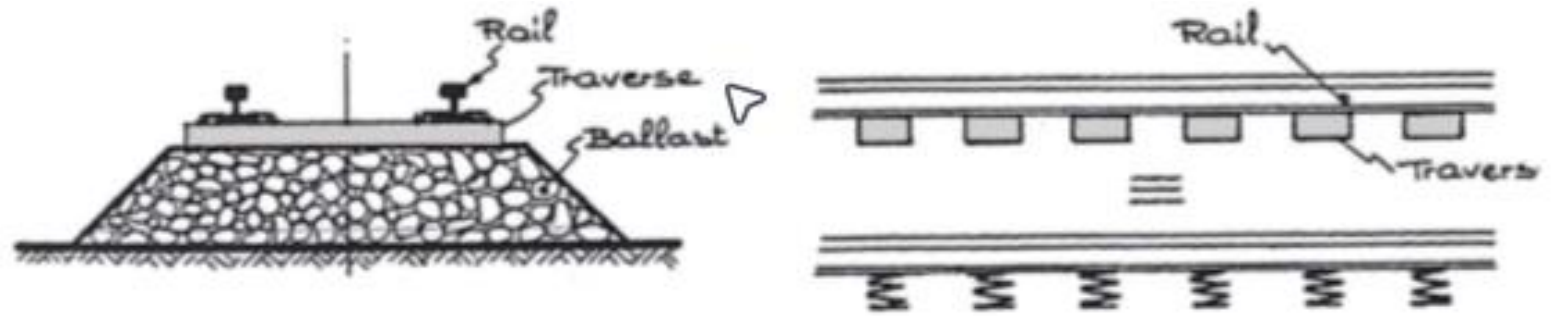


Fig.6.2. Calcul des rails et traverses de chemin de fer (Zimmerman, 1888).

La méthode a été ensuite utilisée par d'autres chercheurs (Rifaat, (1935); Baumann, (1935); Delattre, (1999)) pour l'étude des autres types de fondations tels que les radiers, les murs de soutènement. Tandis que l'insuffisance du modèle de Winkler a été prouvée par plusieurs chercheurs (Terzaghi, 1955). En effet l'inconvénient de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte l'interaction entre les ressorts, ce qui revient à négliger le cisaillement vertical dans le sol. En conséquence, une discontinuité de déplacement se crée entre la zone chargée et la zone non chargée sous la fondation mais en réalité la surface ne montre aucune discontinuité (Figure 6.3).



Fig.6.3. Déflexion d'une fondation élastique de type Winkler soumise à une charge répartie

1. Définition et paramètres

On considère la poutre de largeur b , d'inertie constante, reposant sur un appui continu élastique (de type sol) de la figure 6.4

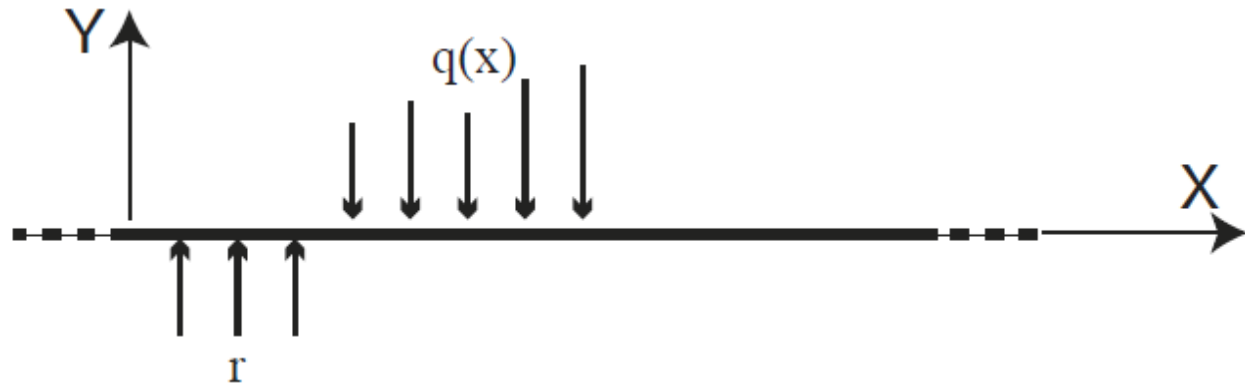


Figure 6.4

Si y désigne la flèche de la poutre au point d'abscisse x , la réaction d'appui en ce point est équivalente à une densité d'effort r :

$$r = -kby$$

où b est la largeur de la poutre supposée constante, k est la raideur de l'appui élastique. Si $q(x)$ est la charge répartie appliquée à la poutre, la flèche doit satisfaire l'équation différentielle d'équilibre suivante :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + kby + q(x) = 0$$

Pour résoudre cette équation, on pose :

$$\frac{1}{l_e} = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} = \lambda$$

La longueur l_e est appelée longueur élastique de la poutre. Les solutions $y(x)$, $y'(x)$, $M(x)$ et $V(x)$ font intervenir des fonctions $W(x)$, $X(x)$, $Y(x)$, et $Z(x)$ suivantes :

pour $x > 0$:

$$\mathcal{W}(x) = -e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

$$\mathcal{X}(x) = e^{-\lambda x} \sin(\lambda x)$$

$$\mathcal{Y}(x) = e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$

$$\mathcal{Z}(x) = -e^{-\lambda x} \cos(\lambda x)$$

pour $x < 0$:

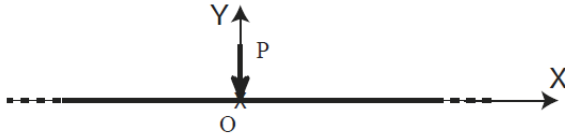
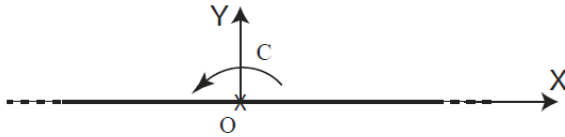
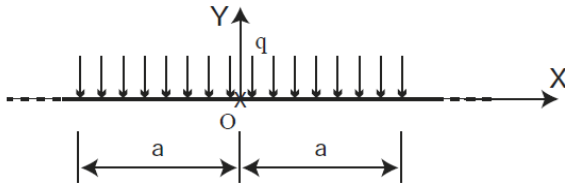
$$\mathcal{W}(x) = -e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$

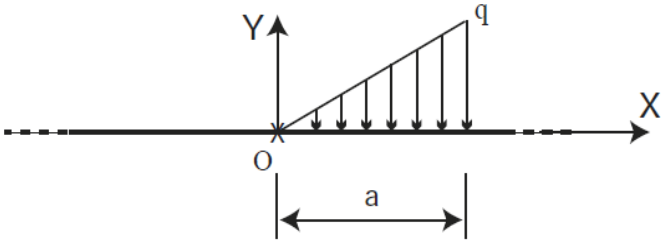
$$\mathcal{X}(x) = e^{\lambda x} \sin(\lambda x)$$

$$\mathcal{Y}(x) = e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$

$$\mathcal{Z}(x) = e^{\lambda x} \cos(\lambda x)$$

2. Formulaire de la poutre infinie :

Géométrie et chargement	Solutions
	$y' = \frac{P\lambda^2}{kb} \mathcal{X}(x) \quad y = \frac{P\lambda}{2kb} \mathcal{W}(x)$ $M = \frac{P}{4\lambda} \mathcal{Y}(x) \quad V = \frac{P}{2} \mathcal{Z}(x)$
	$y' = \frac{C\lambda^3}{kb} \mathcal{Y}(x) \quad y = \frac{C\lambda^2}{2kb} \mathcal{X}(x)$ $M = \frac{C}{2} \mathcal{Z}(x) \quad V = -\frac{C\lambda}{2} \mathcal{W}(x)$
	pour $0 < x < a$: $y' = \frac{q\lambda}{2kb} [\mathcal{W}(a+x) - \mathcal{W}(a-x)]$ $y = -\frac{q}{2kb} [2 + \mathcal{Z}(a+x) + \mathcal{Z}(a-x)]$ $M = \frac{q}{4\lambda^2} [\mathcal{X}(a+x) + \mathcal{X}(a-x)]$ $V = -\frac{q}{4\lambda} [-\mathcal{Y}(a+x) + \mathcal{Y}(a-x)]$ pour $x > a$: $y' = \frac{q\lambda}{2kb} [\mathcal{W}(x+a) - \mathcal{W}(x-a)]$ $y = -\frac{q}{2kb} [\mathcal{Z}(x+a) - \mathcal{Z}(x-a)]$ $M = \frac{q}{4\lambda^2} [\mathcal{X}(x+a) - \mathcal{X}(x-a)]$ $V = -\frac{q}{4\lambda} [-\mathcal{Y}(x+a) + \mathcal{Y}(x-a)]$

Géométrie et chargement	Solutions
	$y'(0) = -\frac{q}{2kba} [1 + \lambda a \mathcal{W}(a) + \mathcal{Z}(a)]$ $y'(a) = -\frac{q}{2kba} [1 - \lambda a + \mathcal{Z}(a)]$ $y(0) = -\frac{q}{4\lambda kba} [1 - \mathcal{Y}(a) + 2\lambda a \mathcal{Z}(a)]$ $y(a) = -\frac{q}{4\lambda kba} [2\lambda a - 1 + \mathcal{Y}(a)]$ pour $0 < x < a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a} [\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(a-x) + 2\lambda a \mathcal{X}(a-x)]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a} [\mathcal{X}(x) + \mathcal{X}(a-x) - \lambda a \mathcal{Y}(a-x)]$ pour $x > a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a} [\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(x-a) - 2\lambda a \mathcal{X}(x-a)]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a} [\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(x-a) - \lambda a \mathcal{Y}(x-a)]$

3. Formulaire de la poutre semi-infinie

Pour obtenir les déformations et les sollicitations dans une poutre semi infinie, on utilise les résultats de la poutre infinie en appliquant une force P_0 et un couple C_0 juste à gauche de O (voir figure 6.2) de telle façon que sous l'ensemble du chargement M et V soient nuls en O .



Figure 6.2

On peut écrire :

$$P_0 = 4(\lambda M_0 + V_0) \quad C_0 = \frac{2}{\lambda}(2\lambda M_0 + V_0)$$

Avec M_0 et V_0 le moment et l'effort tranchant dus à $q(s)$ pour la poutre infinie juste à gauche de O .

On obtient alors pour la poutre semi-infinie :

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{P_0 \lambda^2}{kb} \mathcal{X}(x) + \frac{C_0 \lambda^3}{kb} \mathcal{Y}(x)$$

$$y(x) = y_1(x) + \frac{P_0 \lambda}{2kb} \mathcal{W}(x) + \frac{C_0 \lambda^2}{kb} \mathcal{X}(x)$$

$$M(x) = M_1(x) + \frac{P_0}{4\lambda} \mathcal{Y}(x) + \frac{C_0}{2} \mathcal{Z}(x)$$

$$V(x) = V_1(x) + \frac{P_0}{2} \mathcal{Z}(x) - \frac{C_0 \lambda}{2} \mathcal{W}(x)$$

avec y_1' , y_1 , M_1 et V_1 les solutions obtenues pour la poutre infinie soumise au chargement $q(x)$.

Géométrie et chargement



Solutions

$$P_0 = P[\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{Z}(c)]$$

$$C_0 = \frac{P}{\lambda}[\mathcal{Y}(c) - \mathcal{Z}(c)]$$

Cas particulier $c = 0$:

$$y' = \frac{2P\lambda^2}{kb}\mathcal{W}(x) \quad y'(0) = \frac{2P\lambda^2}{kb}$$

$$y = \frac{2P\lambda}{kb}\mathcal{Z}(x) \quad y(0) = -\frac{2P\lambda}{kb}$$

$$M = -\frac{P}{\lambda}\mathcal{X}(x) \quad M(0) = 0$$

$$V = -P\mathcal{Y}(x) \quad V(0) = -P$$



$$P_0 = -2C\lambda [\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)]$$

$$C_0 = -C [2\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)]$$

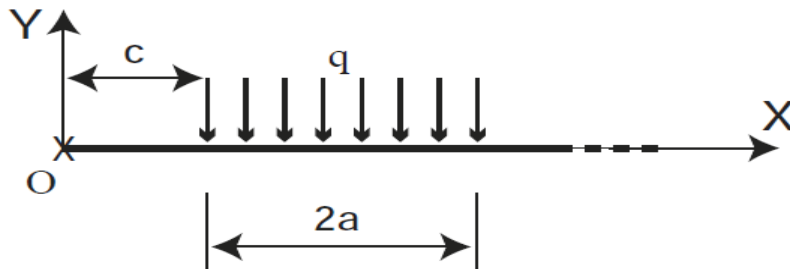
Cas particulier $c = 0$:

$$y' = -\frac{4C\lambda^3}{kb} \mathcal{Z}(x) \quad y'(0) = \frac{4C\lambda^3}{kb}$$

$$y = -\frac{2C\lambda^2}{kb} \mathcal{Y}(x) \quad y(0) = -\frac{2C\lambda^2}{kb}$$

$$M = C\mathcal{W}(x) \quad M(0) = -C$$

$$V = 2C\lambda \mathcal{X}(x) \quad V(0) = 0$$



$$P_0 = \frac{q}{\lambda} [\mathcal{X}(2a+c) - \mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a+c) + \mathcal{Y}(c)]$$

$$C_0 = \frac{q}{2\lambda^2} [2\mathcal{X}(2a+c) - 2\mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a+c) + \mathcal{Y}(c)]$$

Cas particulier $2a = \infty$:

$$P_0 = \frac{q}{\lambda} [\mathcal{Y}(c) - \mathcal{X}(c)]$$

$$C_0 = \frac{q}{2\lambda^2} [\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{X}(c)]$$

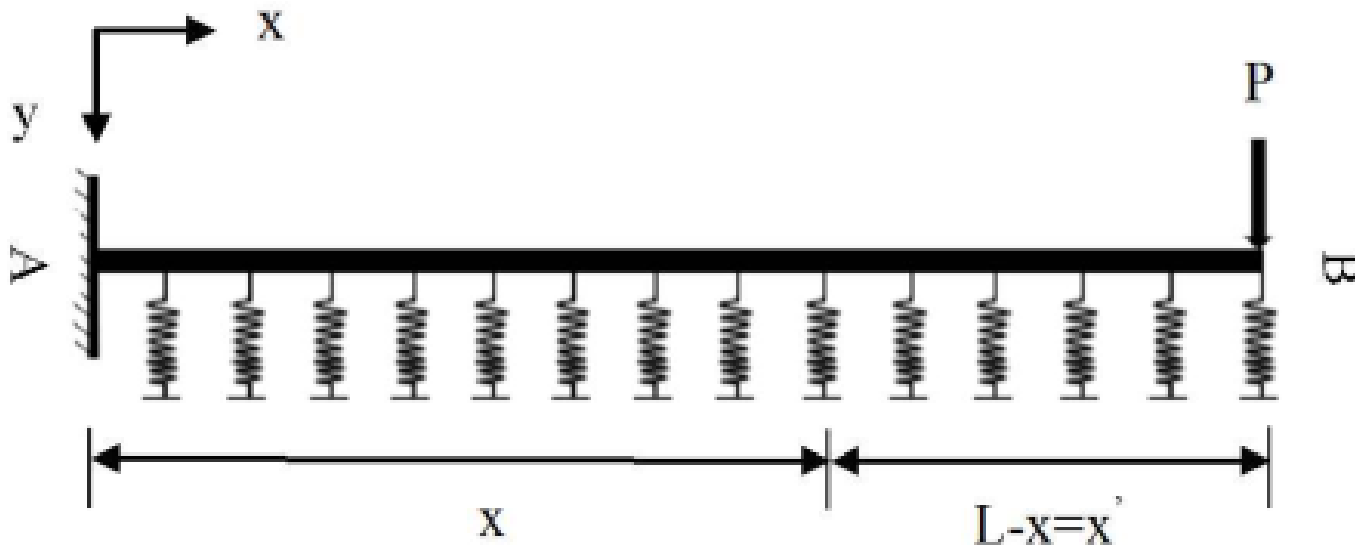
Cas particulier $c = 0$:

$$y'(x) = 0 \quad y(x) = -\frac{q}{kb}$$

$$M = 0 \quad V = 0$$

Exercice 01

Soit une poutre encastrée-libre de longueur $L = 3\text{ m}$, de section $A = (40 \times 60)\text{ cm}^2$, avec un module de Young $E = 25 \times 10^6\text{ kN/m}^2$ et un moment d'inertie $I = 72 \times 10^4\text{ cm}^4$. Cette poutre est soumise à une charge concentrée $P = 2.5\text{ MN}$ et repose sur un sol élastique de coefficient de réaction du sol $k_s = 55 \times 10^3\text{ kN/m}^3$. Calculer le déplacement et la rotation max ainsi que le moment fléchissant et l'effort tranchant max de la poutre en utilisant la solution analytique.



Exercice 02

Soit une poutre infinie soumise à une charge concentrée $P=4.5 \text{ MN}$ reposant sur un sol élastique de rigidité $k_s = 37 \times 10^3 \text{ kN/m}^3$. La poutre est de largeur $b=1\text{m}$ avec une rigidité $EI = 869.45 \text{ MN/m}^3$. Calculer le déplacement max, la rotation max, le moment fléchissant et l'effort tranchant max de la poutre en se basant sur les diagrammes définis précédemment

