

Corrigé type du travail à domicile (4 points)

Pour étudier la variation de la température $T(r, t)$ d'une sphère de rayon R qui échange de la chaleur par convection avec le milieu extérieur à la température T_∞ , sachant que sa température initiale est une certaine fonction $f(r)$. Par raisons de symétrie, la température ne dépendra que de la distance radiale. Dans ce cas, l'équation de Fourier s'écrit

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \Delta T(r, t)$$

Sujette aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= f(r) \\ -\lambda \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} &= h(T(R, t) - T_\infty) \end{aligned}$$

Comme T_∞ est constante, cherchons la solution de l'équation de Fourier, en utilisant la méthode de séparation des variables, sous la forme

$$T(r, t) - T_\infty = AV(r)e^{-\omega t}$$

nous pourrions écrire alors

$$\frac{\partial (T(r, t) - T_\infty)}{\partial t} = a \Delta (T(r, t) - T_\infty)$$

et en y substituant l'expression de $T(r, t) - T_\infty$, nous trouvons

$$\frac{\partial (AV(r)e^{-\omega t})}{\partial t} = a \Delta (AV(r)e^{-\omega t}) \quad \boxed{0.25}$$

soit

$$AV(r) \frac{\partial (e^{-\omega t})}{\partial t} = a Ae^{-\omega t} \Delta V(r)$$

ou encore

$$-\omega AV(r)e^{-\omega t} = a Ae^{-\omega t} \Delta V(r) \quad \boxed{0.25}$$

d'où l'équation différentielle

$$\Delta V(r) + \frac{\omega}{a} V(r) = 0$$

Comme la partie radiale du Laplacien s'écrit sous la forme $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$, nous obtenons $\boxed{0.25}$

$$\frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV(r)}{dr} + \frac{\omega}{a} V(r) = 0$$

Si nous utilisons la fonction $U(r) = rV(r)$, l'équation précédente devient

$$\frac{d^2\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr} + \frac{\omega}{a} \left(\frac{U(r)}{r}\right) = 0 \quad \boxed{0.25}$$

avec

$$\frac{d\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr} = \frac{r \frac{dU(r)}{dr} - U(r)}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{U(r)}{r^2} \quad \boxed{0.25}$$

et

$$\frac{d^2\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{U(r)}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2U(r)}{dr^2} - \frac{r^2 \frac{dU(r)}{dr} - 2rU(r)}{r^4}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{U(r)}{r^2} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2U(r)}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{2U(r)}{r^3}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{U(r)}{r}\right)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{U(r)}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2U(r)}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{2U(r)}{r^3} \quad \boxed{0.25}$$

en substituant ces dérivées, nous obtenons

$$\frac{1}{r} \frac{d^2U(r)}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{2U(r)}{r^3} + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{U(r)}{r^2} \right) + \frac{\omega}{a} \left(\frac{U(r)}{r} \right) = 0$$

soit

$$\frac{1}{r} \frac{d^2U(r)}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} + \frac{2U(r)}{r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{dU(r)}{dr} - \frac{2U(r)}{r^3} + \frac{\omega}{a} \left(\frac{U(r)}{r} \right) = 0 \quad \boxed{0.25}$$

d'où

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} + \frac{\omega}{a} U(r) = 0$$

où encore

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} + \alpha^2 U(r) = 0 \quad \boxed{0.25}$$

avec $\alpha^2 = \frac{\omega}{a}$. La solution de cette équation différentielle est

$$U(r) = C_1 \cos \alpha r + C_2 \sin \alpha r$$

d'où nous obtenons pour la fonction $V(r)$ sous la forme

$$V(r) = C_1 \frac{\cos \alpha r}{r} + C_2 \frac{\sin \alpha r}{r}$$

Remarquons que pour $r = 0$, la fonction $V(r)$ sera indéterminée, pour cela nous devons prendre $C_1 = 0$, d'où 0.25

$$V(r) = C_2 \frac{\sin \alpha r}{r}$$

par conséquent, la température $T(r) - T_\infty$ s'écrit

$$T(r, t) - T_\infty = A \frac{\sin \alpha r}{r} e^{-\omega t}$$

L'application de la condition aux limites

$$-\lambda \frac{\partial (T(R, t) - T_\infty)}{\partial r} = h(T(R, t) - T_\infty)$$

avec

$$\frac{\partial (T(r, t) - T_\infty)}{\partial r} = \frac{\partial \left(A \frac{\sin \alpha r}{r} e^{-\omega t} \right)}{\partial r} = A e^{-\omega t} \frac{\partial \left(\frac{\sin \alpha r}{r} \right)}{\partial r} = A e^{-\omega t} \frac{\alpha r \cos \alpha r - \sin \alpha r}{r^2} \quad \text{0.25}$$

nous conduit à

$$A \frac{\alpha R \cos \alpha R - \sin \alpha R}{R^2} e^{-\omega t} = -\frac{h}{\lambda} A \frac{\sin \alpha R}{R} e^{-\omega t} \quad \text{0.50}$$

$$\alpha R \cos \alpha R - \sin \alpha R = -\frac{h}{\lambda} R \sin \alpha R$$

$$\frac{\alpha R \cos \alpha R - \sin \alpha R}{\sin \alpha R} = -\frac{h}{\lambda} R \frac{\sin \alpha R}{\sin \alpha R}$$

$$\alpha R \cot \alpha R - 1 = -\frac{h}{\lambda} R$$

soit

$$\alpha R \cot \alpha R = 1 - \frac{h}{\lambda} R \quad \text{0.25}$$

Les valeurs possibles du coefficient α_n sont donc solutions de l'équation

$$\alpha_n R \cot \alpha_n R = 1 - \frac{h}{\lambda} R$$

par conséquent la température $T(r) - T_\infty$ peut être représentée par la série

$$T(r,t) - T_{\infty} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n e^{-a \alpha_n^2 t} \frac{\sin \alpha_n r}{r}$$

À partir de la condition initiale, nous avons

$$rf(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin \alpha_n r$$

Comme les fonctions $\sin \alpha_n r$ sont orthogonales dans l'intervalle $[0, R]$, le coefficient A_n sont déterminés à partir de la formule

$$\int_0^R rf(r) \sin \alpha_n r dr A_n = A_n \int_0^R \sin^2 \alpha_n r dr \quad \boxed{0.50}$$

d'où

$$A_n = \frac{\int_0^R rf(r) \sin \alpha_n r dr}{\int_0^R \sin^2 \alpha_n r dr} \quad \boxed{0.25}$$