Centre universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut des Sciences et Technologies
Département de génie mécanique et d'électromécanique
Transfert de chaleur I
Pr. Saouli Salah

<u>Corrigé type du travail à domicile (4points)</u>

a) Equation de l'ailette

$$\frac{d^2\left(T(x)-T_\infty\right)}{dx^2}-m^2\left(T(x)-T_\infty\right)=0$$

avec $m^2=\dfrac{hP}{\lambda S}$

La solution de cette équation différentielle est

$$T(x)-T_\infty=C_1e^{mx}+C_2e^{-mx}$$

b) Conditions aux limites

$$x=0 \quad T(0)=T_b$$

$$x=L \quad -\lambda\left[\frac{dT(x)}{dx}\right]_{x=L}=h\left(T(x)-T_\infty\right)_{x=L}$$

c) Profil de la température

$$\frac{dT(x)}{dx}=mC_1e^{mx}-mC_2e^{-mx}$$

En appliquant les conditions aux limites, nous obtenons

$$C_1+C_2=T_b-T_\infty \qquad \boxed{0.25}$$

$$-\lambda m\left(C_1e^{mL}-C_2e^{-mL}\right)=h\left(C_1e^{mL}+C_2e^{-mL}\right) \qquad \boxed{0.25}$$

soient

$$C_1+C_2=T_b-T_\infty \qquad \boxed{0.25}$$

$$C_1\left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL}+C_2\left(\frac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}=0 \qquad \boxed{0.25}$$

ainsi

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix} T_b-T_\infty & 1 \\ 0 & \left(\dfrac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(1+\dfrac{h}{m\lambda}\right)e^{mL} & \left(\dfrac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}\end{vmatrix}}=\frac{\left(T_b-T_\infty\right)\left(\dfrac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}}{-2\left(\cosh mL+\dfrac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)} \qquad \boxed{0.25}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & T_b - T_\infty \\ \left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL} & \left(\frac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL} \end{vmatrix}} = \frac{-\left(T_b - T_\infty\right)\left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL}}{-2\left(\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)}$$ 0.25

d'où

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\left(\frac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}}{-2\left(\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)}e^{mx} + \frac{-\left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL}}{-2\left(\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)}e^{-mx}$$ 0.25

soit

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\left(\frac{h}{m\lambda}-1\right)e^{-mL}e^{mx} - \left(1+\frac{h}{m\lambda}\right)e^{mL}e^{-mx}}{-2\left(\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)}$$ 0.25

ou encore

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\frac{h}{m\lambda}\left(e^{m(x-L)} - e^{-m(x-L)}\right) - \left(e^{m(x-L)} + e^{-m(x-L)}\right)}{-2\left(\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL\right)}$$ 0.25

par conséquent

$$\frac{T(x)-T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{m\lambda}\sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL}$$ 0.25

d) Quantité de chaleur évacuée par l'ailette est

$$Q_a = -\lambda S\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x=0}$$ 0.25

sachant que

$$\frac{dT(x)}{dx} = \left(T_b - T_\infty\right)\frac{-m\sinh m(L-x) - \frac{hm}{m\lambda}\cosh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL}$$ 0.25

nous obtenons

$$\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x=0} = -m(T_b - T_\infty)\frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL}$$

d'où

$$Q_a = \lambda S m(T_b - T_\infty)\frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL} = \sqrt{hP\lambda S}\,\frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL}$$ $\boxed{0.50}$

e) Rendement de l'ailette

$$\eta_a = \frac{Q_a}{hPL(T_b - T_\infty)} = \frac{1}{mL}\,\frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda}\cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda}\sinh mL}$$ $\boxed{0.50}$