

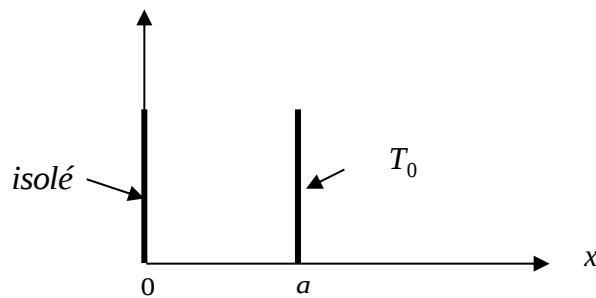
Corrigé type de l'interrogation n°2 Licence 2025-2026

Durée : 1 heure

Interrogation écrite n°2 (5 points)

Un mur plan d'épaisseur a et de conductivité thermique λ , dont un côté est maintenu à la température constante T_0 et l'autre est isolé, est le siège d'une génération de chaleur interne $q_s = q_0 \cos(\alpha x + \beta)$ où α et β sont des constantes positives.

- a) Quelles sont les unités de q_0 , α et β ,
- b) Ecrire l'équation de Poisson,
- c) Ecrire les conditions aux limites,
- d) Trouver les constantes d'intégration C_1 et C_2 ,
- e) Déduire la température $T(x)$ et
- f) Calculer le flux de chaleur q évacué



Réponses

a) Les unités des constantes q_0 , α et β sont :

$$[q_0] = [q] = Wm^{-3} \quad 0.25$$

$$[\alpha] = \frac{1}{[x]} = m^{-1} \quad 0.25$$

$$[\beta] = \frac{1}{1} = 1 \quad 0.25$$

b) L'équation de Poisson dans ce cas est

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{q_0}{\lambda} \cos(\alpha x + \beta) = 0 \quad 0.25$$

c) Les conditions aux limites pour cette équation sont

$$x = 0, \frac{dT}{dx} = 0 \quad 0.25+0.25$$

$$x = a, T = T_0$$

d) L'intégration de l'équation de Poisson nous donne

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{q_0}{\lambda\alpha} \sin(\alpha x + \beta) + C_1 \quad 0.25$$

$$T(x) = \frac{q_0}{\lambda\alpha^2} \cos(\alpha x + \beta) + C_1 x + C_2 \quad 0.25$$

en calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons

$$C_1 = \frac{q_0}{\lambda\alpha} \sin \beta \quad 0.5$$

$$C_2 = T_0 - \frac{q_0}{\lambda\alpha^2} \cos(\alpha a + \beta) - \frac{q_0 a}{\lambda\alpha} \sin \beta \quad 0.5$$

e) Ainsi, la distribution de la température s'écrit sous la forme

$$T(x) - T_0 = \frac{q_0}{\lambda\alpha^2} (\cos(\alpha x + \beta) - \cos(\alpha a + \beta)) + \frac{q_0 \sin \beta}{\lambda\alpha} (x - a) \quad 1$$

f) Le flux de chaleur évacué est

$$q = -\lambda \left(\frac{dT(x)}{dx} \right)_{x=a} = \frac{q_0}{\alpha} \sin(\alpha a + \beta) - \frac{q_0 \sin \beta}{\alpha} \quad 1$$