

Corrigé type de l'interrogation écrite n°2 (5 points)

Durée : 1 heure

Dans un système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le tenseur de conductivité thermique $[\lambda]$ d'un solide orthotropique est donné par la matrice

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- a) Ecrire les expressions des flux de chaleur q_1 , q_2 et q_3 le long des directions Ox_1, Ox_2 et Ox_3 .
- b) Dédire l'équation de la chaleur si le solide est siège d'une génération de chaleur volumique $G(\vec{r}, t)$.
- c) En introduisant les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) tel que

$$X = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} x_1, Y = \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} x_2, Z = \left(\frac{\lambda}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{2}} x_3$$

où λ est une conductivité thermique de référence, écrire l'équation de la chaleur dans ce nouveau système de coordonnées.

- d) Calculer l'élément de volume dV_1 dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) et dV_2 dans le système de coordonnées (X, Y, Z) . Comme $G(\vec{r}, t)$ est définie par unité de volume, à quelle condition $dV_1 = dV_2$.
- e) Réécrire maintenant l'équation de la chaleur en fonction des conductivités thermiques λ_1 , λ_2 et λ_3 .

Réponses

Dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le tenseur de conductivité thermique $[\lambda]$ est donné par la matrice

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- a) Expressions des flux de chaleur q_1 , q_2 et q_3 le long des directions Ox_1, Ox_2 et Ox_3 : à partir de la loi de Fourier généralisée, nous avons

$$\begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \boxed{0.25}$$

soient

$$q_1 = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad q_2 = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad q_3 = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}$$

0.25

0.25

0.25

- b) L'équation de la chaleur avec génération de chaleur volumique $G(\vec{r}, t)$ est

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + G(\vec{r}, t) \quad \boxed{0.25}$$

en substituant les expressions des flux de chaleur, nous obtenons

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial x_2^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial x_3^2} + G(\vec{r}, t) \quad \boxed{0.25}$$

- c) A partir du changement de variables, nous avons

$$x_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} X, \quad x_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} Y, \quad x_3 = \left(\frac{\lambda_3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} Z$$

En substituant ces expressions dans l'équation de la chaleur, nous trouvons

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial \left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} X \right)^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial \left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} Y \right)^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial \left(\left(\frac{\lambda_3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} Z \right)^2} + G(\vec{r}, t) \quad \boxed{0.25}$$

Soit

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial Z^2} \right] + G(\vec{r}, t) \quad 0.25$$

d) L'élément de volume dV_1 dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) est

$$dV_1 = dx_1 dx_2 dx_3 \quad 0.25$$

Dans le système de coordonnées (X, Y, Z) , L'élément de volume dV_2 est

$$dV_2 = dXdYdZ = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad 0.25$$

Comme $G(\vec{r}, t)$ est définie par unité de volume, pour que $dV_1 = dV_2$, il faut satisfaire la relation

2.0

$$\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} = 1, \text{ soit } \lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}} \quad 0.25$$

e) Par conséquent, l'équation de chaleur se réduit à

$$\rho C_P \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{r}, t)}{\partial Z^2} \right] + G(\vec{r}, t) \quad 0.25$$