

Matière : *Équations aux différences*
Responsable : Y. Halim

SÉRIE DE TD N° 3

Exercice 1 : (Suplemntaire)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

avec les valeurs initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nuls.

1. Déterminer les points d'équilibres de l'équation (1).
2. Montrer que la solution de l'équation (1) est périodique de période p (déterminer la valeur de p).
3. Les points d'équilibres de l'équation (1) sont-ils globalement stable ?
4. Déduire la forme de solution de l'équation (1).

Exercice 2 : (Examen 2025)

Soit l'équation aux différences linéaire d'ordre 3

$$x_{n+3} - (\alpha + \beta + 1)x_{n+2} + (\alpha + \beta + \alpha\beta)x_{n+1} - \alpha\beta x_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Donner les valeurs de α et β pour les solutions de l'équation (2) soit stable.

Exercice 3 :

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

avec α, x_0 et $x_{-1} \in]0, +\infty[$.

1. Déterminer les points d'équilibres de l'équation (3).
2. Étudier la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre pour $\alpha > 1$.
3. Que direz vous pour le cas $0 < \alpha < 1$.

Exercice 4 : (Examen 2019)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{1 + x_n}. \quad (4)$$

avec $x_{-1}, x_0 \geq 0$ et $\alpha, \beta > 0$.

1. Montrer que si $\alpha < 1$, alors le seul point d'équilibre $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable.

Supposons existe $A > 0$ tel que $x_n \leq A, \forall n \geq 0$ et $\alpha < 1$.

2. Montrer que $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable.