

Matière : *Equations aux différences*

Responsable : Y. Halim

SÉRIE DE TD N° 2

Exercice 1 :

Résoudre les équations aux différences suivantes :

(a) $x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 0, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0.$

(b) $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 16x_n - 12x_{n-1} = 0, \quad x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.$

Exercice 2 : (Examen 2023)

Soit $\{J_n\}_{n \geq 0}$ la suite de Jacobsthal définie par

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \quad J_0 = 0, J_1 = 1.$$

1. Donner la forme de la solution (Formule de Benet) de la suite de Jacobsthal.
2. Montrer que

$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = -(-2)^n, \quad \forall n \geq 2. \quad (\text{L'identité de Cassini}) \quad (1)$$

$$J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n = (-2)^n J_r, \quad \forall n, r \geq 1. \quad (\text{L'identité d'Okagne}) \quad (2)$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = n^2.$

(b) $x_{n+1} - x_n = 2^{n+1}, \quad x_0 = 1.$

Exercice 4 :

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n + 1)}, \quad n \geq 0 \quad (3)$$

1. Déterminer les points d'équilibre de l'équation (3).
2. Montrer que la solution de l'équation (3) est périodique de période 5.
3. Déduire la forme de solution de l'équation (3).