المحاضرة الرابعة: التوزيع فوق الهندسي

تمهيد:

تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة، فهذا النوع من التجارب مبني على أساس مفهوم السحب بدون إرجاع، مما يجعل احتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت؛ أي أن الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى، على عكس تجارب توزيع ذي الحدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت من محاولة إلى أخرى كونها من التجارب المستقلة، وإن السحب بموجبها يتم بالإرجاع.

فعلى سبيل المثال، لو كان لدينا مجتمع يحتوي على (N) من العناصر، فيه(N_1) لنوع معين من العناصر، أما المتبقي منه هو$(N-N_1)$ لنوع آخر من العناصر، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع، فإن عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1)، وإن عدد حالات الفشل هي $(N-N_1)$.

أمثلة عن التجربة فوق الهندسية:

المثال الأول: مجموعة مكونة من 20 شخصا منهم 12 رجلا و 8 سيدات اختيرت عشوائيا عينة مكونة من 5 أفراد لتكوين لجنة.

هذه التجربة هي تجربة فوق هندسية لتوفر الشروط التالية:

- تكرار المحاولات عددا محددا من المرات n.
- محاولات غير مستقلة (نتيجة كل محاولة تؤثر وتتأثر بنتائج المحاولات السابقة أو اللاحقة لها)؛ أي احتمال النجاح غير ثابت من محاولة لأخرى.
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.

المثال الثاني: طلبية مكونة من 11 جهازا من بينها 4 أجهزة بها عطب، فإذا تم اختيار 4 أجهزة عشوائيا من طرف زبون لفحصها فهذه التجربة هي تجربة فوق هندسية لتوفر الشروط التالية:

- محاولات متكررة وغير مستقلة.
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.

1. **دالة الاحتمال:**

تعرف دالة الاحتمال للتوزيع فوق الهندسي وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X=x)=\begin{cases}\dfrac{C_{N_1}^{x}C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} & x=0,1,2,3,\dots,n\\ 0 & \text{ما عدا ذلك}\end{cases}$$

حيث:

N: عدد عناصر المجتمع.

N_1: عدد عناصر المجتمع التي تحقق الخاصية المرغوبة.

n: حجم العينة؛ أي عدد العناصر المسحوبة دون ارجاع.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمال للتوزيع فوق الهندسي هي دالة احتمال كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \,/\, x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}(\mathrm{X}=x) = \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{C}_{\mathrm{N}_1}^{x}\mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}} \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_{\mathrm{N}_1}^{x}\, \mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}} \mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}} = 1$$

2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية للتوزيع الهندسي من خلال مايلي:

1.2. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد التوقع الرياضي كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} x\mathrm{p}(\mathrm{X}=x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} x \frac{\mathrm{C}_{\mathrm{N}_1}^{x}\mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}} \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} x \frac{\mathrm{N}_1\,!}{x!\,(\mathrm{N}_1 - x)!} \mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}} \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{N}_1!}{(x-1)!\,(\mathrm{N}_1 - x)!} \mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}$$

$$= \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}} \sum_{x=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_{\mathrm{N}_1-1}^{x-1}\, \mathrm{C}_{\mathrm{N}_2}^{\mathrm{n}-x}$$

$$= \frac{N_1}{C_N^n} C_{N-1}^{n-1}$$

$$= \frac{N_1}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}} C_{N-1}^{n-1}$$

$$= n \frac{N_1}{N}$$

$$E(X) = np$$

2.2. التباين:

يعرف التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{C_{N_1}^{x} C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)}{C_N^n} \sum_{x=2}^{n} C_{N_1-2}^{x-2} C_{N_2}^{n-x}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)}{C_N^n} C_{N-2}^{n-2}$$

$$= \frac{N_1(N_1-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$V(X) = \frac{N_1(N_1-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nN_1}{N} - \frac{n^2 N_1^2}{N^2}$$

$$= \frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$= \frac{(N-n)}{(N-1)} \quad (n) \left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)$$

$$V(X) = npq \frac{(N-n)}{(N-1)}$$