المحاضرة الثالثة: التوزيع الهندسي

تمهيد:

تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع برنولي التي تفترض بأن نتيجة كل تجربة هي إما نجاح المحاولة باحتمال (p) أو فشلها باحتمال $(1-\mathrm{p})$، وعدد محاولات في تجارب التوزيع الهندسي لا تكون محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأساس فإن المتغير العشوائي المنفصل X هو عدد مرات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة x يسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها $1-x$.

بافتراض أنه لدينا المتغير X يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يتوزع المتغير وفق التوزيع الهندسي، والشروط الواجب توفرها في التجربة حتى تعتبر عشوائية هندسية هي:

- تكرار المحاولات بشكل لا نهائي إلى غاية الحصول على أول نجاح.
- لكل محاولة نتيجتين ممكنتين فقط.
- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

أمثلة عن التجربة الهندسية:

المثال الأول: سحب كمال 3 كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق فيه أربع كرات حمراء وخمس كرات خضراء، ثم قام بكتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

هذه التجربة ليست بتجربة هندسية لأن احتمال النجاح غير ثابت من محاولة لأخرى، فالمحاولات غير مستقلة فكل تجربة تؤثر على التجربة التي قبلها.

المثال الثاني: إلقاء قطعة نقود منتظمة بشكل متكرر والتوقف عند ظهور الصورة.

هذه التجربة هي تجربة هندسية لتوفر الشروط التالية:

- تكرار المحاولات بشكل لا نهائي إلى غاية الحصول على أول نجاح.
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.
- احتمال النجاح (ظهور الصورة) ثابت من محاولة لأخرى.

1. دالة الاحتمال:

تعرف دالة الاحتمال وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1} & x=1,2,3,\ldots\ldots \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

X : عدد المحاولات وصولا إلى أول نجاح.

p: احتمال النجاح.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمالية للتوزيع الهندسي هي دالة احتمال كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x\ /\ x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=1}^{n} p(X=x) = p + pq^1 + pq^2 + \cdots + pq^n$$

$$= p(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n)$$

$$= p\left(\frac{1}{1-q}\right) = 1$$

2. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$M_x(T) = E(e^{xt})$$

$$= \sum_{x=1}^{n} e^{xt} p(X=x)$$

$$= \sum_{x=1}^{n} e^{xt} pq^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{n} e^{xt}\frac{q^x}{q}$$

$$= \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{n} (e^t q)^x$$

$$= \frac{p}{q}\left[(e^t q)^1 + (e^t q)^2 + \cdots + (e^t q)^n\right]$$

$$= \frac{p}{q}\left[\frac{qe^t}{1-qe^t}\right]$$

$$M_x(T) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

3. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية للتوزيع الهندسي من خلال مايلي:

1.3. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد التوقع الرياضي بالاعتماد على الدالة المولدة للعزوم كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$E(X) = \frac{dM_x(T)}{dt}|t = 0$$

$$= \frac{d\left(\frac{pe^t}{1 - qe^t}\right)}{dt}|t = 0$$

$$= \frac{pe^t(1 - qe^t) + qe^t(pe^t)}{(1 - qe^t)^2}|t = 0$$

$$= \frac{pe^t - pqe^{2t} + pqe^{2t}}{(1 - qe^t)^2}|t = 0$$

$$= \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}|t = 0$$

$$= \frac{p}{(1 - q)^2}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

2.3. التباين:

يحسب التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \frac{d^2M_x(T)}{dt^2}|t = 0$$

$$= \frac{d\left[\frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}\right]}{dt}|t = 0$$

$$= \frac{pe^t(1 - qe^t)^2 - [pe^t(2)(1 - qe^t)^{2-1}(-qe^t)]}{(1 - qe^t)^4}|t = 0$$

$$= \frac{(1 - qe^t)[pe^t(1 - qe^t) - pe^t(2)(-qe^t)]}{(1 - qe^t)^4}\ |t = 0$$

$$= \frac{(1 - qe^t)[pe^t - qpe^{2t} + 2pqe^{2t}]}{(1 - qe^t)^4}\ |t = 0$$

$$E(X^2) = \frac{pe^t + qpe^{2t}}{(1 - qe^t)^3}\ |t = 0$$

$$= \frac{p + qp}{(1 - q)^3}$$

$$= \frac{p(1+q)}{p^3}$$

$$V(X) = \frac{p(1+q)}{p^3} - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$