المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد:

رغم الطابع العشوائي للظواهر العشوائية (غير المستقرة)، فإنه على العموم وفي غالب الأحيان لها سلوك معين نجهله، وعلى هذا الأساس حاول علماء الاحصاء والرياضيات تتبع سلوك الظواهر العشوائية في كثير من ميادين المعرفة واستطاعوا وضع قوانين احتمالية لها تفسر سلوك هذه الظواهر بطريقة علمية، فكلما كانت مجموعة من الظواهر العشوائية تستجيب لجملة من القواعد المشتركة (التكرار أي التحقق، المتوسط، الانتشار، شكل التوزيع وغيرها) كلما كان لها نفس القانون الاحتمالي.

يمكن أن نميز بين نوعين من القوانين الاحتمالية:

- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة.
- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

المحاضرة الأولى: توزيع برنولي والتوزيع الثنائي

1. توزيع برنولي:

1.1. التعريف بتوزيع برنولي:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه جيمس برنولي، ويعد توزيع برنولي أو ما يسمى أحيانا بمحاولة برنولي الأساس لبناء العديد من التوزيعات الأخرى، وتعرف تجربة برنولي التي تعد من أبسط أنواع التجارب العشوائية بأنها: التجربة التي تكون نتيجتها إما نجاحا أو فشلا، ومن أمثلة هذه التجارب:

- الوحدة المنتجة سليمة أو معيبة.
- نتيجة رمي قطعة نقدية صورة أو كتابة.
- نتيجة المشاركة في مسابقة نجاح أو رسوب.
- الرمي على هدف وإصابته أوعدم إصابته.

ملاحظة:

التسمية نجاح أو فشل تستخدم فقط لتعريف نتائج محاولة برنولي وليس للدلالة على تفضيل نتيجة على أخرى؛ أي أنه إذا كانت النتيجة نجاحا فهذا لا يعني بالضرورة أنها النتيجة المرغوب فيها.

ويعتبر النموذج الاحتمالي الذي يحتوي فراغه على حدثين بسيطين فقط من أبسط النماذج الاحتمالية، وبما أن الحدثين البسيطين النجاح p أو الفشل q لهما طبيعة وصفية؛ أي أنهما من البيانات الوصفية فإننا نحتاج عند إجراء عملية التحليل الإحصائي إلى تحويل البيانات الوصفية إلى كمية، ويستخدم عادة الرقم 1 للإشارة إلى النجاح والرقم 0 للإشارة إلى الفشل، وذلك بالاحتمالات التالية:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X}=1)=\mathrm{p}$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)=\mathrm{q}$$

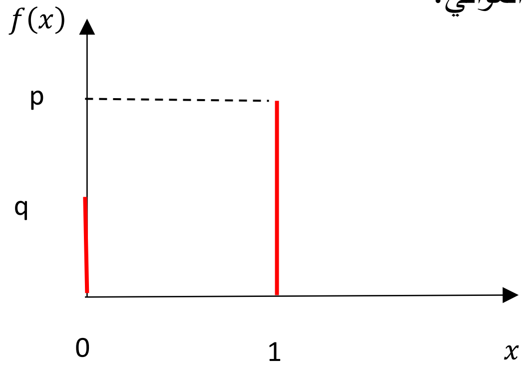
x_i	$\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_i)$
1	p
0	q
$\sum$	$p+q=1$

وتعرف دالة الاحتمال لتوزيع برنولي كما يلي:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{p}^{x}\mathrm{q}^{1-x} \qquad x=0,1$$

2.1. التمثيل البياني لدالة احتمال توزيع برنولي:

بما أن توزيع برنولي من التوزيعات المتقطعة فإن التمثيل البياني لهذا التوزيع يتم بواسطة الأعمدة، والمتغير له قيمتين فقط لذلك يمثل بعمودين طول كل منهما يتوقف على القيمة الاحتمالية لحادث النجاح (وبالتالي الفشل)، وهذا ما يبينه الشكل الموالي:

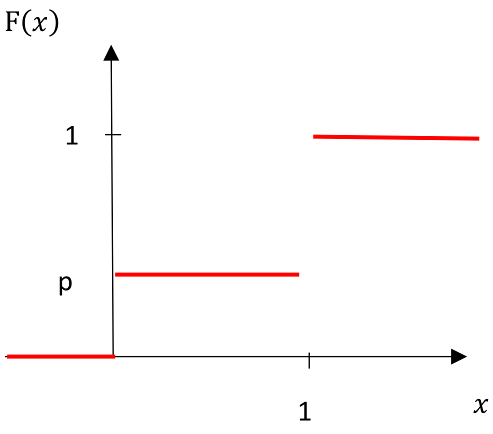


3.1. دالة التوزيع التراكمية وتمثيلها البياني:

تعرف دالة التوزيع التراكمية كما يلي:

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \mathrm{p} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

وتمثل هذه الدالة بثلاث درجات وفق العلاقات الثلاثة العاكسة لدالة التوزيع التراكمية، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



4.1. القيم العددية المميزة لتوزيع برنولي:

مثل أي متغير عشوائي فإنه متغير برنولي له مميزاته العددية التي نوضحها من خلال الآتي:

1.4.1. التوقع الرياضي:

يحسب التوقع الرياضي لتوزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i p_i = \sum_{i=0}^{1} x_i p^x q^{1-x} = p$$

$$E(X) = p$$

1.4.2. التباين:

يحسب التباين لتوزيع برنولي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p_i = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p^x q^{1-x} = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V(X) = pq$$

1.5. الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(T) = E(e^{xt})$$

$$= \sum_{i=0}^{1} e^{xt} p_i = \sum_{i=0}^{1} e^{xt} p^x q^{1-x} = \sum_{i=0}^{1} (pe^t)^x q^{1-x}$$

$$M_x(T) = q + pe^t$$

ملاحظة:

إن توزيع برنولي هو أبسط قانون احتمالي، وهو من الناحية العملية يطبق في دراسة إحصائية تتم على عينة عشوائية حجمها n=1، لذلك لهذا القانون أهمية نظرية كبيرة لأن كل القوانين الأخرى تبنى عليه بينما ليس له أي قيمة تطبيقية لأن العينة التي حجمها n=1 غير ممثلة للمجتمع الاحصائي.

2. التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين):

يعتبر التوزيع الثنائي من أبسط وأقدم وأسهل التوزيعات الاحتمالية، وقد شكل نقطة الانطلاق لدراسة توزيعات احتمالية أخرى مثل توزيع بواسون، التوزيع فوق الهندسي وغيرها.

وتتمثل خصائص هذا التوزيع فيما يلي:

- تتضمن تجربة التوزيع الثنائي عددا من المحاولات وليكن (n)، وهو حجم العينة المسحوبة.
- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط هما النجاح أو الفشل.
- أن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات، وكذا الأمر بالنسبة لاحتمال الفشل.

للتجربة الثنائية استخدامات كثيرة منها:

- طبيعة الانتاج معيب أو جيد.
- إصابة هدف معين أو عدم إصابته.
- نتيجة مباراة نهائية في كرة السلة (خسارة أو فوز).
- نتيجة امتحان نهائي (رسوب أو نجاح).

وبالتالي فالمتغير الثنائي هو تكرار لمحاولة برنولي عددا من المرات، وفي كل محاولة مكررة فإن احتمال النجاح p يبقى ثابتا.

إن عدد مرات النجاح X في تجربة ثنائية مكونة من n محاولة مكررة يدعى بمتغير عشوائي ثنائي، ويسمى التوزيع الاحتمالي للمتغير الثنائي بالتوزيع الاحتمالي الثنائي، ويرمز له:

$$X \sim B(n,p)$$

n و p: هما معلمتا هذا التوزيع، وهذا يعني أن هذا التوزيع يتحدد تحديدا تاما بمعلومية معلمتيه n (حجم العينة) و p (احتمال النجاح).

1.2. دالة الاحتمال:

تعرف دالة الاحتمال للتوزيع الثنائي كما يلي:

$$p(X=x)=\begin{cases} c_n^x p^x q^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

ويمكن أن نلاحظ أن شروط دالة الاحتمال محققة:

$$\forall x:\ f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{n} p(X = x) = \sum_{x=0}^{n} c_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

أما التمثيل البياني لدالة احتمال التوزيع الثنائي فيتم بالاعتماد على الأعمدة، وبما أنه للتوزيع الثنائي معلمتين n و p فإن شكل منحنى هذا التوزيع يتحدد بناء عليهما تحديدا كاملا، ونميز بين الحالات التالية:

- إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثلا مهما كانت قيمة n.
- إذا كانت $p \neq q$ فإن منحنى التوزيع يكون ملتويا، وتزداد درجة الإلتواء كلما ابتعدت قيمة p عن $\frac{1}{2}$، فإذا نقصت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء موجبا، وإذا زادت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء سالبا.

2.2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال مايلي:

1.2.2. التوقع الرياضي:

يمكن التعبير عن التوقع الرياضي لمتغير ذو الحدين العشوائي X بدلالة التوقع الرياضي لمتغير برنولي، فبما أن عدد مرات تحقق النجاح $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ وهي متغيرات عشوائية برنولية مستقلة فإن التوقع الرياضي يعرف كما يلي:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) \\ &= p + p + \cdots + p \\ &= np \end{aligned}$$

$$E(X) = np$$

كما تم البرهان على القيمة المتوقعة لهذا التوزيع كما هو موضح فيما يلي:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\, P(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{n} x\, c_n^x p^x q^{n-x} \\ &= np \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-x)!\,(x-1)!} p^{x-1} q^{n-x} \end{aligned}$$

$$= n.p(p+q)^{n-1}$$

$$E(X) = np$$

2.2.2. التباين:

بما أن هذا التوزيع ليس سوى عبارة عن تكرار لمحاولات برنولي، وبما أن تباين مجموع متغيرات عشوائية مستقلة يساوي مجموع تباين هذه المتغيرات، فإن التباين يعرف كما يلي:

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$
$$= pq + pq + \cdots + pq$$
$$= npq$$
$$V(X) = npq$$

كما تم البرهان على التباين لهذا التوزيع كما هو موضح فيما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\, c_n^x p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=0}^{n} c_{n-2}^{x-2}\, p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$V(X) = npq$$

3.2. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$M_x(T) = (e^{xt})$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{xt} c_n^x \, p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} c_n^x \, (e^t p)^x q^{n-x}$$

$$= (pe^t + q)^n$$

$$M_x(T) = (pe^t + q)^n$$