المحاضرة الثانية: توزيع بواسون

(توزيع الظواهر النادرة، توزيع الاحتمالات الصغيرة)

تمهيد:

ينسب هذا التوزيع إلى مكتشفه سيمون دنيس بواسون عام 1837، ويعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الهامة، ويعتمد عليه في المجالات العلمية التي ينصب الاهتمام فيها على إيجاد توزيعات عدد المرات التي تشاهد فيها ظاهرة عشوائية خلال وحدة معينة، ومثال ذلك:

- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد البنوك كل دقيقة.
- عدد الأخطاء في الأعمال (كتابة، طباعة) في كل صفحة.
- عدد حوادث المرور في مدينة ما خلال فترة زمنية معينة.
- عدد المكالمات الهاتفية في فترة زمنية معينة.
- عدد آلات الإنتاج التي تتعطل في مصنع خلال فترة زمنية معينة.

وتوضح الأمثلة السابقة الذكر مدى تنوع واتساع استخدام هذا التوزيع في حياتنا العملية، ويطلق على التجربة التي تقدم لنا قيما عددية لمثل هذه المتغيرات إسم التجربة البواسونية التي تتميز بالخصائص التالية:

- عدد المحاولات كبير جدا (لا محدود أو لا نهائي).
- احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى.
- احتمال النجاح صغير ويقترب من الصفر، واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.

1. دالة الاحتمال:

يهتم توزيع بواسون بصورة خاصة بعدد حالات النجاح المتوقعة في الوحدة (زمن، مكان، طول، حجم...الخ)، ويسمى المتغير الذي يحقق هذه الخواص بمتغير بواسون أو المتغير البواسوني، وتعرف دالة الاحتمال لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mathrm{p}(\mathrm{X}=x)=\begin{cases} e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2,\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

λ: هي معلمة التوزيع، وهي مقدار ثابت.

e: أساس اللوغاريتم الطبيعي.

x: قيم المتغير العشوائي X.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمالية لتوزيع بواسون هي دالة احتمال كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \,/\; x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}$$

$$= \mathrm{e}^{0}$$

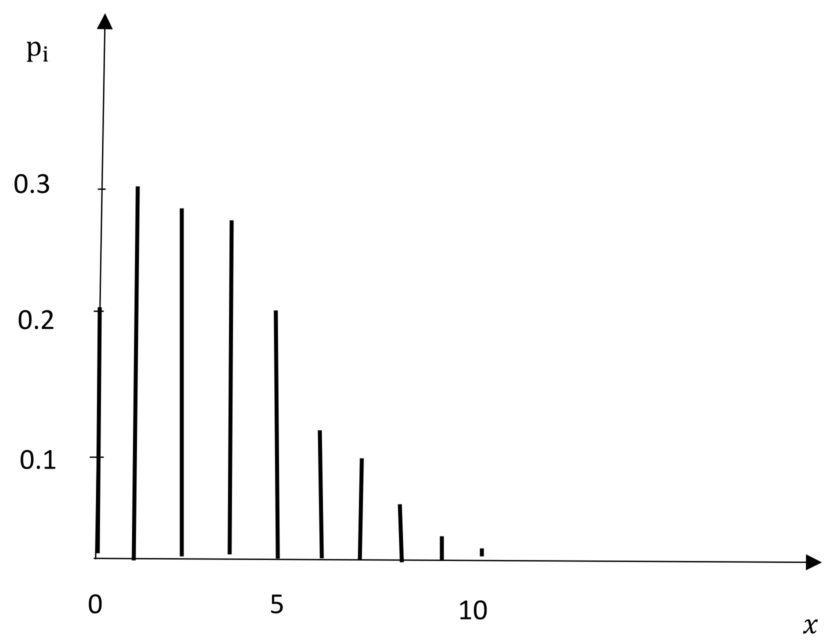
$$= 1$$

ملاحظة:

$\frac{\lambda^x}{x!}$: هو فك الحد العام التسلسلي التام للمقدار e^{λ} .

أما فيما يخص التمثيل البياني لدالة الاحتمال لتوزيع بواسون فعلى العموم يكون التمثيل البياني ملتويا نحو اليمين (إلتواء موجب)، وكلما زادت قيمة λ فإن الشكل يقترب من التماثل وتقل المسافة بين أي نقطتين متتاليتين، كما أنه كلما زادت قيمة n كلما أصبحت نقاط المنحنى متتالية أكثر تلاصقا ويصبح المنحنى مستمرا ويقترب من التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي.

الشكل 1: التمثيل البياني لتوزيع بواسون



ملاحظة:

هناك العديد من المراجع التي تدرج في نهايتها ملاحق جداول تعكس توزيع الاحتمالات، أي قيم دالة الاحتمال من أجل قيم مختلفة لـ X.

مثال:

يوضح الجدول الموالي قيم دالة احتمال لتوزيع بواسون من أجل بعض القيم لـ λ:

x \ λ	0.1	0.2	0.3
0	0.9048	0.8187	0.74008
1	0.0905	0.1637	0.2222
2	0.0045	0.0164	0.0333
3	0.0002	0.0011	0.0033

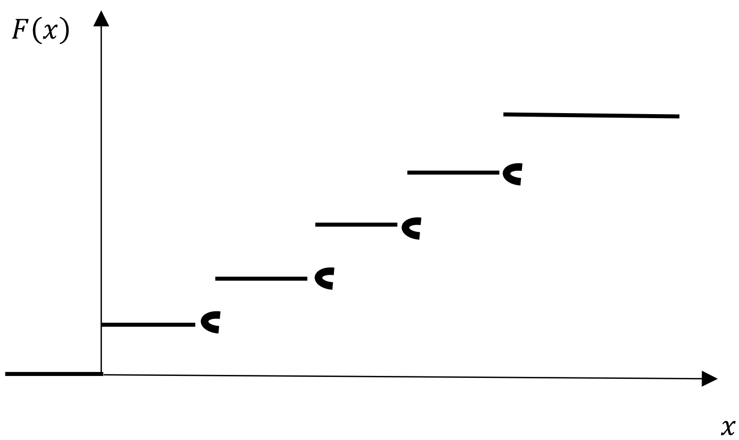
فمن أجل القيم $\lambda = 0.1$ و $x = 1$ فإن: $p(X = 1) = 0.0905$

2. دالة التوزيع التراكمية:

تعرف دالة التوزيع التراكمية وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x}}{x!}$$

ويأخذ الشكل البياني المقابل لتابع التوزيع التراكمي شكل السلم كأي توزيع متقطع، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



ملاحظة:

توجد جداول تتضمن قيم دالة التوزيع التراكمية عند مجموعة من التجارب والاحتمالات.

مثال:

يوضح الجدول الموالي القيم الاحتمالية التراكمية لـ x من أجل بعض القيم لـ λ:

x \ λ	0.1	0.2	0.3
0	0.9048	0.8187	0.7408
1	0.9953	0.9825	0.9631
2	0.9998	0.9988	0.9964
3	1	0.9999	0.9997
4		1	1

فمن أجل القيم $\lambda = 0.1$ و $x \leq 1$ فإن: $p(X \leq 1) = 0.9953$

3. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لتوزيع بواسون من خلال مايلي:

1.3. التوقع الرياضي:

يحسب التوقع الرياضي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

.2.3 التباين:

يحسب التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^1 \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \lambda$$

.3.3 الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$\mathrm{M}_x(\mathrm{T}) = (\mathrm{e}^{x\mathrm{t}})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{x\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{xt} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{t}})^x}{x!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{t}}}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda + \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{t}}}$$

$$\mathrm{M}_x(\mathrm{T}) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - 1)}$$