المدرسة العليا للاساتذة ـ ميلة
مسار أستاذ التعليم الابتدائي
رياضيات قاعدية 1
الدرس 6 : أنشطة حسابية في R

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف

a وb عددان حقيقيان.
✍ القول أن a أكبرمن b أو يساويه معناه $a-b$ عدد موجب ونكتب : $b \preceq a$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^{+}$
✍ القول أن a أصغرمن b أو يساويه معناه $a-b$ عدد سالب ونكتب : $b \succeq a$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^{-}$

ملاحظة

❶ $b \succ a$ معناه $a-b \in \mathbb{R}^{+}$ و $b \neq a$ نقول إن a اكبر تماما من b . على محور معلمه $(O;I)$ تكون النقطة A ذات الفاصلة a على يمين النقطة B التي فاصلتها b
❷ ترتيب الأعداد تصاعديا يعني، ترتيب الأعداد من اليمين إلأى اليسار ومن الأصغر إلأى الأكبر.
❸ نقول أن العددان a و b مرتبان نفس ترتيب c و d إذا كان $a-b$ و $c-d$ لهما نفس الإشارة.

تعريف

مقارنة عددين a و b معناه التصريح بصحة إحدى الحالات الثلاث الآتية: ① $b \preceq a$ ② $b = a$ ③ $b \succeq a$

طرائق المقارنة

❖مقارنة عددين عشريين

لمقارنة عددين عشريين نتبع الخطوات التالية :
① ننظر إلى الإشارة
② نقارن جزئيهما الصحيحان
③ نقارن جزئيهما العشريان

مثال

$-548 \prec 13$ (لأن 13 موجب و -548 عدد سالب)
$54.24 \succ 36.911$ (لأن $54 \succ 36$)
$54.15 \succ 54.142$ (لأن الجزئين العشريين $150 \succ 142$)

❖مقارنة عددين ناطقين بكتابة كسرية

a ، b و c أعداد موجبة تماما.

✍ العددان $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ لهما نفس الترتيب مع ترتيب a و b

✍ العددان $\frac{c}{a}$ و $\frac{c}{b}$ ترتيبهما متعاكس مع ترتيب العددان a و b.

مثال

$\frac{5}{11} \prec \frac{4}{11}$ لأن $5 \prec 4$ و $\frac{11}{4} \preceq \frac{11}{5}$ لأن $5 \preceq 4$

❖مقارنة باستعمال عدد ثالث

مبرهنة

من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c:إذا كان $b \preceq a$ و $c \preceq b$ فإن $c \preceq a$

مثال

لنقارن بين $\frac{26}{27}$ و $\frac{19}{16}$

لدينا $1 \prec \frac{26}{27}$ و $1 \succ \frac{19}{16}$ ومنه $\frac{19}{16} \prec \frac{26}{27}$ (العدد الثالث الذي أخذناه هو 1)

❖مقارنة بدراسة إشارة الفرق :

لمقارنة عددين a و b يكفي دراسة إشارة الفرق فإذا كان $0 \prec a - b$ فإن $b \prec a$ وإذا كان$0 \succ a - b$ فإن $a \succ b$

مثال

السؤال: قارن بين العبارتين $a = 4k + 7$ و $b = 3k + 5$ لكل $k \geq 0$.

الحل:

نحسب الفرق:

$$a - b = (4k + 7) - (3k + 5) = k + 2.$$

بما أن $k \geq 0$, نحصل على:

$$a - b = k + 2 \geq 2 > 0.$$

إذن: $a > b$ لكل $k \geq 0$

الترتيب والعمليات

❶الترتيب والجمع

مبرهنة 1

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c: إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$

★★★ البرهـــــــان ★★★

نبدأ من الفرضية: $b > a$ بطرح a من الطرفين نحصل على: $0 < b - a$
نضيف العدد c إلى الطرفين: $c < c + (b - a)$
لكن: $c + (b - a) = b + c - a$
بإعادة الترتيب نحصل على: $a + c < b + c$
إذن المتراجحة تبقى صحيحة بعد اضافة نفس العدد في الطرفين. $\boxed{a < b \Rightarrow a + c < b + c.}$

مثال

نعلم أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $n - 2 < n + 5$ و $n + 1 < n + 4$
نريد المقارنة بين: $(n + 4) + (n + 5)$. و $(n + 1) + (n - 2)$
بجمع الطرفين في المتراجحتين نحصل على: $(n + 1) + (n - 2) < (n + 4) + (n + 5)$.
نرتب الطرفين نحصل على : $2n - 1 < 2n + 9$. لكل $n \in \mathbb{N}$.

مبرهنة 2

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b وc و d : إذا كان $\left(a < b \text{ و } c < d\right)$
فإن: $a + c < b + d$

★★★ البرهـــــــان ★★★

بما أن: $a < b$ ومنه $b - a > 0$ و $c < d$ ومنه $d - c > 0$
بجمع المتراجحتين نحصل على: $(b - a) + (d - c) > 0$ ومنه $(b + d) - (a + c) > 0$
إذن: $\boxed{a + c < b + d.}$

مثال

نعلم أن: $2 < 1$ و $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

بجمع الطرفين نحصل على: $\sqrt{2}+1 < \sqrt{3}+2$

❷الترتيب والضرب

مبرهنة 3

a ، b و c أعداد حقيقية:

من أجل $0 \succ c$ لدينا : $a \preceq b$ يكافئ $ac \preceq bc$

من أجل $0 \prec c$ لدينا : $a \preceq b$ يكافئ $ac \succeq bc$

★★★ البرهــــــان ★★★

الفرضية لدينا: $a < b$ أي: $0 < b - a$

الحالة 1: إذا كان $c > 0$.

نضرب الطرفين في c: $0 < c(b-a)$ ومنه $0 < cb - ca$ أي: $ca < cb$

الحالة 2: إذا كان $c < 0$.

من الفرضية نفسها: $0 < b - a$

نضرب الطرفين في $c < 0$ فنحصل على: $0 > c(b-a)$ أي: $0 > cb - ca$ ومنها: $ca > cb$

مبرهنة 4

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c و d : إذا كان $\left(a \preceq b \text{ و } c \preceq d\right)$

فإن: $ac \preceq bd$

مبرهنة 5

من أجل $a > 0$ و $b > 0$ لدينا : $a > b$ يكافئ $a^2 > b^2$

من أجل $a < 0$ و $b < 0$ لدينا : $a < b$ يكافئ $a^2 < b^2$

★★★ البرهــــــان ★★★

نبدأ بالتذكير $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

الحالة الأولى: افترض $0 \leq a < b.$

في هذه الحالة $a - b < 0$ و $a + b \geq 0$ لننظُر بدقّة:

- بما أن $a \geq 0$ و$b > a$ فإن $a + b > 0$.

إذن $a - b < 0$و $a + b > 0$، ومن حاصل الضرب نحصل على: $(a-b)(a+b) < 0$

وبما أن هذا الاخير يساوي $a^2 - b^2$، فإن: $a^2 < b^2$

الحالة الثانية: افترض $a < b \leq 0$

- نضع $a' = -a$ و$b' = -b$ فتصبح $0 \leq b' < a'$.

طبق الحالة الأولى على b' وa' نحصل $a'^2 < b'^2$، أي $b^2 < a^2$.

هذا يعني $a^2 > b^2$ كما أردنا.

مثال

قارن بين العددين $b=\sqrt{2}.$ و $a=\sqrt{\sqrt{5}-1}$

لدينا $b^2=2.$ و $a^2=\sqrt{5}-1$

نريد إذًا مقارنة: $2.$ و $\sqrt{5}-1$

نفرض أن $\sqrt{5}-1<2$ ومنه $\sqrt{5}<3$

وبتربيع الطرفين (كلاهما موجب): $5<9$ وهي علاقة صحيحة.

إذن: $\sqrt{5}-1<2$ ومنه $a^2<b^2$ ومنه $a<b$ (لان كلا العددين a و b موجبان)

مبرهنة 6

a و b عددان حقيقيان موجبان

لدينا : $a\preceq b$ يكافئ $\sqrt{a}\preceq\sqrt{b}$

مبرهنة 7

a و b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة

لدينا : $a\preceq b$ يكافئ $\frac{1}{a}\succeq\frac{1}{b}$

مثال

قارن بين العددين $b=\frac{1}{\sqrt{3}}.$ و $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

بما أن $\sqrt{2}>0$ و $\sqrt{3}>0$، و نلاحظ أن: $\sqrt{2}<\sqrt{3}.$

إذن حسب مبرهنة سابقة. $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ وعليه $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}.>\frac{1}{\sqrt{2}}}$

مبرهنة 8

a عدد حقيقي لدينا

إذا كان $1\succeq a\succeq 0$ فإن $a\succeq a^2\succeq a^3$

إذا كان $1\preceq a$ فإن $a\preceq a^2\preceq a^3$

مثال

قارن بين a^3 و a^2 حيث $a=\frac{1}{2}.$

لدينا: $a=\frac{1}{2}<1$

ومنه حسب مبرهنة سابقة $a^3<a^2$

المجالات

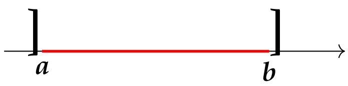
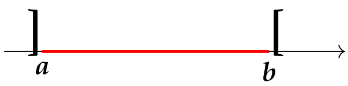
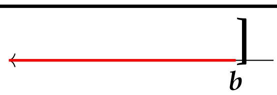
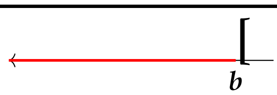
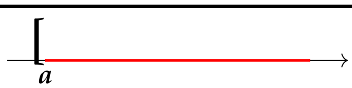
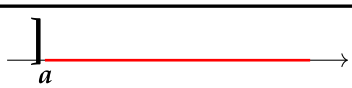
تعريف

a و b عددان حقيقيان : حيث $a \preceq b$.

نسمي مجالا مغلقا حداه a و b، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \preceq x \preceq b$، ونرمز إليه بالرمز $[a,b]$

التمثيل الهندسي للمجال : يمثل المجال $[a,b]$ هندسيا بالشكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتاهما a و b على الترتيب.

أنواع المجالات

الرمز	هو مجموعة الأعداد $x \in \mathbb{R}$	يمثل على المستقيم العددي بـ
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a,b[$	$a \leq x < b$	
$]a,b]$	$a < x \leq b$	
$]a,b[$	$a < x < b$	
$]-\infty,b]$	$x \leq b$	
$]-\infty,b[$	$x < b$	
$[a,+\infty[$	$x \geq a$	
$]a,+\infty[$	$x > a$	

ملاحظـــــــــــة

❶ المجال المغلق من جهة a يشملها، والمفتوح من جهتها لا يشملها.
❷ الحدان a و b ينتميان إلى المجال $[a,b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a,b[$
❸ الرمزان "$+\infty$" و "$-\infty$" يقرآن "ناقص مالانهاية ، زائد مالا نهاية"

عناصـر المجـال :

يتميز المجال $[a,b]$ بالعناصـر الآتيـة :

✍ مركزه، وهو العدد الحقيقي : $c = \dfrac{a+b}{2}$.
✍ طوله، وهو العدد الحقيقي الموجب: $b-a$
✍ نصف قطره، وهو العدد الحقيقي الموجب $r = \dfrac{b-a}{2}$

تقاطع و إتحاد مجاليـن

✍ تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I و J ونرمز له بالرمز $I \cap J$
✍ إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J ونرمز له بالرمز $I \cup J$

مثال -- تطبيقي

نعتبر المجالين $I = [-2,1]$ و $J = [0,4]$
✍ مثل على المستقيم العددي كلا من I و J
✍ أحسب طول ومركز المجالين I و J
✍ حدد الأعداد الحقيقية المشتركة على بين المجالين I و J
✍ حدد الاعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J.

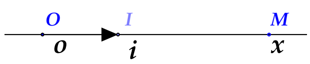
القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف

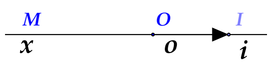
x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O,I) فاصلتها x.

القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM، ونرمز لها بالرمز "$|x|$" ونكتب $|x| = OM$

من التعريف نستنتج أنه :



$x \succeq 0 \quad |x| = OM = x$



$x \preceq 0 \quad |x| = OM = -x$

ونكتب من أجل كل عدد حقيقي x :

$$|x| = \begin{cases} x & x \in [0;+\infty[\\ -x & x \in]-\infty;0] \end{cases}$$

مثال

✍ العدد $x = \sqrt{3}$ موجب ،ومنه$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

✍ العدد $x = 1 - \sqrt{2}$ سالب،ومنه $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

✍ القيمة المطلقة للصفر هي صفر ونكتب $|0| = 0$

خــواص

x و y عددين حقيقين لدينا :

① $|-x| = |x|$ ② $\sqrt{x^2} = |x|$ ③ $|xy| = |x| \times |y|$

④ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$ ⑤ $|x+y| \preceq |x| + |y|$ (المتباينة المثلثية)

إذا كان x و y من نفس الإشارة فإن المتباينة المثلثية تصبح مساواة

المسافة بين نقطتين

مبرهنة

إذا كان A و B نقطتين من مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتاهما a و b على الترتيب، فإن : $AB = |a-b| = |b-a|$

المسافة بين عددين حقيقين

تعريف

المسافة بين عددين حقيقين a و b هي العدد : $|a-b| = |b-a|$

الحصر

تعريف

حصر العدد الحقيقي x يعني إيجاد عددين a و b حيث : $a \preceq x \preceq b$

مثال

$\sqrt{5} \approx 2.2367$

حصر العدد الحقيقي $\sqrt{5}$ إلى الوحدة هو : $2 \prec \sqrt{5} \prec 3$

حصر العدد الحقيقي $\sqrt{5}$ إلى 10^{-2} هو : $2.23 \prec \sqrt{5} \prec 2.24$

مثال

إذا علمت أن $2 < y < 5$ و $1 < x < 2$ عين حصرا لكل مما يلي $\dfrac{x-y}{x+y}$ ، $(x-3)(y+1)$ ، x^2+y^3+xy

مبرهنة

c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب.

من أجل كل عدد حقيقي x، $|x-c| \preceq r$ معناه $x \in [c-r;c+r]$

مثال

✍ $|x-10| \preceq 5$ معناه $-5 \preceq x-10 \preceq 5$ أي $5 \preceq x \preceq 15$ وعليه : $x \in [5;15]$

✍ $|x-6| \prec 3$ معناه $-3 \preceq x-6 \preceq 3$ أي $3 \prec x \prec 9$ وعليه : $x \in]3;9[$

نتيجة

c عدد حقيقي كيفي و r عدد حقيقي موجب، من أجل كل عدد حقيقي x النصوص الآتية متكافئة:

✍ $x \in [c-r;c+r]$ (في صيغة مجال) ✍ $d(c;x) \preceq r$ (في صيغة مسافة)

✍ $c-r \preceq x \preceq c+r$ (في صيغة حصر) ✍ $|x-c| \preceq r$ (في صيغة قيمة مطلقة)

مثال

المجال	الحصر	المسافة	القيمة المطلقة
$x \in [-2;5]$	$-2 \le x \le 5$	$d\left(x;\frac{3}{2}\right) \le \frac{7}{2}$	$\left\lvert x-\frac{3}{2}\right\rvert \le \frac{7}{2}$

حل معادلات أو متراجحات تتضمن قيما مطلقة:

طريقة

لحل معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة، نعبرعن القيمة المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي ونترجم المساويات أوالمتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين.

مثال

نريد حل المعادلة: $|x-3|=5$ في $\mathbb{R}$

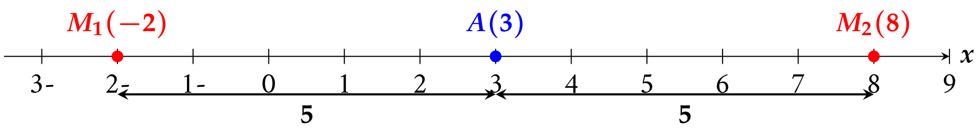
نعتبر النقطة الثابتة $A(3)$ على المستقيم العددي، و $M(x)$ نقطة متغيّرة.

$|x-3|=5$ معناه $AM=d(x,3)=5$

أي أن النقطة M تبعد عن A مسافة 5.

إذن لدينا نقطتان تحققان الشرط: $M_2(8)$ و $M_1(-2)$

$$\boxed{S=\{-2,\ 8\}}$$



ومنه النقطة $A(3)$ هي المركز، والنقطتان $M_1(-2)$ و$M_2(8)$ هما النقطتان اللتان تبعدان عن A بنفس المسافة 5.

إذن تمثّل المعادلة $|x-3|=5$ مجموع النقط M التي تبعد عن $A(3)$ مسافة 5.

مثال

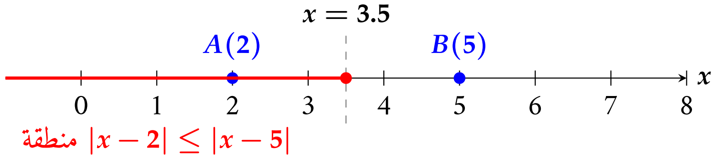
نريد حل المتراجحة: $|x-2|\le|x-5|$ في $\mathbb{R}$

نعتبر النقاط: $A(2),\quad B(5),\quad M(x)$

لدينا: $|x-2|=d(x,2),\quad |x-5|=d(x,5)$ فتصبح: $AM\le BM$ أي أن النقطة M أقرب إلى A من B

معناه: $x\le\frac{2+5}{2}=3.5$ أي

$$\boxed{x\in]-\infty,\ 3.5]}$$



ومنه مجموعة الحل هي جميع النقط $M(x)$ الواقعة على يسار منتصف القطعة $[AB]$ أو عنده، أي النقاط الأقرب إلى $A(2)$ من $B(5)$.

القـوى الصـحيـحة :

تعريف :

ليكن a عدداً حقيقياً كيفياً، و n عدداً طبيعياً غير معدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a العدد a^n حيث:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم وكل عدد طبيعي غير معدوم لدينا:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ومن أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$a^1 = a$$

أمثلة :

$$(0.5)^{-2} = \frac{1}{0.5^2} = \frac{1}{0.25}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

خصائص :

لتكن a و b عددين حقيقيين غير معدومين، و m و n عددين صحيحين نسبيين. لدينا:

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

القيـم المقربـة

مـدور عـدد حـقيقي:

ليكن A عدداً حقيقياً يُكتب على الشكل العشري، وليكن a رقمه العشري ذو الرتبة p. نُسمي مدور A إلى 10^{-p} العدد العشري الحاصل عليه كما يلي:

- إذا كان $a < 5$ فإننا نأخذ العدد وأرقامه العشرية إلى الرقم العشري رتبته p ونضيف 0 في هذا الرقم.
- إذا كان $a \geq 5$ فإننا نأخذ العدد وأرقامه العشرية إلى الرقم العشري رتبته p ونضيف 1 إلى هذا الرقم.

الكتابة العلمية :

تعريف :

كتابة عدد عشري على الشكل العلمي تعني التعبير عنه على الشكل: $a \times 10^n$ (أو $-a \times 10^n$) حيث a عدد عشري يحقق: $1 \leq a < 10$، و n عدد صحيح نسبي.

أمثلة :

العدد	الكتابة العلمية	إزاحة الفاصلة
128000000	$1{,}28 \times 10^8$	8 مراتب نحو اليسار
0.000000075-	$-7{,}5 \times 10^{-8}$	7 مراتب نحو اليمين

مثال آخر: الكتابة $0.000321 = 32.1 \times 10^{-5}$ هذه ليست كتابة علمية لأن $32.1 > 10$.

رتبة مقدار عدد :

تعريف :

رتبة مقدار عدد عشري A مكتوب على الشكل العلمي هي العدد $a \times 10^k$ (أو $-a \times 10^k$) حيث a هو مدور العدد A إلى الوحدة.

مبدأ أرخميدس

نص مبدأ أرخميدس :

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد طبيعي n بحيث $n > x$، اي مهما كان العدد كبيراً، يوجد دائمًا عدد طبيعي أكبر منه.

التفسير الهندسي لمبدأ أرخميدس :

إذا أخذنا قطعة طولها 1 ووضعنا نسخاً منها متتالية على مستقيم، فإننا بعد عدد كافٍ من المرات نتجاوز أي طول مهما كان.

مثال :

- نأخذ قطعة طولها 1 سم.
- نريد تجاوز طول 25.5 سم.
- بوضع 26 قطعة متتالية، يصبح الطول 26 سم، فنكون قد تجاوزنا الهدف.

الكثافة في R :

تعريف :

نقول أن مجموعة $A \subset R$ كثيفة في R إذا تحقق: $\forall a < b, \; \exists x \in A$ بحيث $a < x < b.$

أي أنّ عناصر A تتخلل كامل الخط الحقيقي.

أمثلة :

الأعداد النسبية Q كثيفة في R، الأعداد اللانسبية كثيفة أيضاً في R، الأعداد الصحيحة Z ليست كثيفة.

المحدودية في R

مجموعة محدودة من الأعلى :

تكون مجموعة A محدودة من الأعلى إذا وجد عدد M بحيث:

$$\forall x \in A, \; x \leq M.$$

مجموعة محدودة من الأسفل :

تكون A محدودة من الأسفل إذا وجد عدد m بحيث:

$$\forall x \in A, \; m \leq x.$$

المجموعة المحدودة

تكون المجموعة محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل معًا.

الحد العلوي (Supremum) :

العدد $s = supA$ هو الحد العلوي إذا :

$$\forall x \in A, \; x \leq s.$$

مثـال :

$$\sup[0, 1[= 1.$$

الحد السفلي :(Infimum)

العدد $i = \inf A$ هو الحد السفلي إذا:

$$\forall x \in A, \; x \geq i.$$

مثال:

$$\inf]0, 1] = 0.$$

القيمة الحدي الكبرى (Maximum):

إذا كان $s = \sup A$ وينتمي إلى A فإنه يسمى: $\max A.$

القيمة الحدية الصغرى (Minimum) :

إذا كان $i = \inf A$ وينتمي إلى A فإنه يسمى: $\min A.$

مثال : $A = [0, 3] \Rightarrow \max A = 3,\ \min A = 0.$