Espace de probabilité :

(Ω, F) est l'espace probabilisable

Ω : l'ensemble des resultats possibles

F : est la tribu defini sur Ω ie

- $\Omega, \phi \in F$
- $A \in F$, $\overline{A} = A^c \in F$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in F$

Probabilite : (Ω, F) espace probabilisable P est une mesure de Probabilité ssi

(1) $P(\Omega) = 1$

(2) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$: $P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P$, $A_i \cap A_j = \phi$ $\forall i \neq j$

Déf : Soit (Ω, F, P) un espace de proba Une v.a. est une application :

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad tq :$$

$$\{w \in \Omega : X(w) \in B\} = \{X \in B\} \in F$$

* Processus stochastique :

Déf : Un processus stochastique est une famille de variable aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ défini sur un espace probabilisé (Ω, F, P) et indexée par le temps t (discret $t \in \mathbb{N}$ ou continu $t \in \mathbb{R}^*$)

- Chaque X_t est une variable aléatoire
- Le processus décrit l'évaluation aléatoire d'un phénomène au cours du temps.

- Selon la nature de T et de l'espace d'état E, on distingue différents types de processus chaîne de Markov, mouvement brownien, Processus de Poisson

* Processus stochastique strictement stationnaire :

Déf : Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est dit strictement stationaire si, pour entier $n \geq 1$, pour tout choise d'instant $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, et pour tout décalage $h \in T$, on a :

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \overset{loi}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots X_{t_n+h})$$

C'est-à-dire que la loi jointe de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ne dépent que des écarts entre ces instants et non de leur position absolue

* Stationnarité Faible (ou au sens large ou d'ordre 2) : on demande seulement que

(1) L'espérance $E[X_t]$ soit indépendante de t

(2) La covariance $Cov(X_t, X_{t+h})$ dépend uniquement de h et pas de t.

Resumé :

Les Martingales :

(1) X_n Martingales il suffit de verifier les condition suivantes.

- $E(X_n) < \infty$ (a)
- $E(X_{n+1}/f_n) = X_n$ (b)

(2) X_n est un sou-martingale il suffit de montrer que :

- $E(X_{n+1}/f_n) \geq X_n$

(avec la condition (a))

(3) X_n est un sur-martingal :

- $E(X_{n+1}/f_n) \leq X_n$.

Propriété : X_n est un process. aléatoire et f- mesurable.

- $E(X_{n+m}/f_n) = X_n$
- $E(X_n) = E(E(X_n/f_0)) = E(X_0)$
- $E(X_{n+1}) = E(X_n) = E(X_0)$.

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de V.a de carré intégrable indépedante On : $E(X_n) = m$, $Var(X_n) = \delta^2$

On pose : $S_0 = 0$, $M_0 = 0$, $f_0 = \{0, \pi\}$

et pour $n \geq 1$
$$\begin{cases} S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\ M_n = S_n - nm \\ f_n = \sigma\{X_1 \dots X_n\} \end{cases}$$

(1) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est f_n-Mg

(2) " " $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est f_n- sous-Mg.

(3) " " $(M_n^2 - n\delta^2)$ est f_n-Mg

Solution :

On a : $M_{n+1} = S_{n+1} - (n+1)m$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

$\Rightarrow S_n + X_{n+1} - n - m = M_n - m + X_{n+1}$ ... (*)

(1) On a X_n est de carré integrable alors $E(X_n) < \infty$

(2) $(M_n)_{n\geq 0}$ est f_n-Mg Si :

$E(M_{n+1}/f_n) = M_n \Leftrightarrow E(S_{n+1} - (n+1)m / f_n)$

de (*) $E(M_n - m + X_n / f_n)$

On a l'indép. de la suite

$E(M_n) - E(m + X_{n+1} / f_n)$

Comme M_n est f- mesurable :

$= M_n - (m + E(X_{n+1}/f_n))$

et comme X_n est indep.

$= M_n - (m + E(X_{n+1}))$

$= M_n - m + m = \underline{\underline{M_n}}$

Prof de TD

$X_n \sim \mathcal{N}(m, \delta^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}$$

$X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(iid) : identiquement indéstribuée

Controle stochastique

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Probabilité on appelle processus aléatoire la famille de V.a. $(X_t)_{t\in T}$

- T est l'ensemble des temps (par ex $T = \mathbb{N}$ ou $T = \mathbb{R}^+$)
- Pour chaque temps $t \in T$, X_t est une V.a. exps: Chaine de Markov, MB, Processus de Poisson

* Processus de Poisson: un pross. de poisson homogéne de paramétre $\lambda > 0$ si:

(1) $N_0 = 0$

(2) Les accroissement sont indepand. ($N_{t+s} - N_t$ et stationaire et suivent une loi de poisson de paramétre $N_{t+s} - N_t \sim \mathcal{P}(\lambda s)$)

Exemple: Un guichet de banque reçoit les clients selon un pross. de poisson d'intensité $\lambda = 4$ clients par heur.

(1) Quelle est la probabilité de recevoir exactement 2 clients en 30 min?

(2) Quelle est la probabilité de recevoir au moin 1 client en 15min

Solution:

$$N_{1/2} - N_0 \sim \mathcal{P}(\lambda t) = \mathcal{P}(4 \cdot \tfrac{1}{2}) \Rightarrow N_{1/2} \sim \mathcal{P}(2)$$

$$P(N_{1/2} = 2) = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = \frac{2}{e^2}$$

$t = 0{,}25$, $N_{0,25} \sim \mathcal{P}(0{,}25 \cdot 4) \sim \mathcal{P}(1)$

$$P(N_{0,25} \geq 1) = 1 - P(N_{0,25} < 1) = 1 - P(N_{0,25} = 0) = 1 - \frac{1}{e}$$

. Filtration de processus adapté

Def de filtration: en probabilité une filtration est une suite croissante de tribus (ou σ-algébres) notée généralement $(\mathcal{F}_t)_{t\geq}$ cela représente l'information disponible jusqu'au temps t.

(2) Intuition:

C'est comme si on regardait une Vidéo progressivement, image par image: au temps t, on ne connait que ce qui s'est passé jusqu'à t, pas aprés

(3) Déf formelle: On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration si:

$$\forall s \leq t, \ \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

cela signifie que l'information ne diminue pas avec le temps

. Def d'un processus adapté:

Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ si pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable.

Déf : (Processus progressivement mesurables) : Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$ si pour tout $t \geq 0$ l'application suivant :

$$([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$
$$(s, w) \mapsto X_s(w)$$

est mesurable.

Martingales

Proposition (Propriétés de L'espérence conditionnelle) : Soit X et Y deux V.a intégrables et G Une sous tribu de $\mathcal{F}$

(a) Linéarité : soit a et b deux constantes :

$E(aX+bY|G) = a E(X|G) + b E(Y|G)$

(b) Croissance : Si $X \leq Y$ Alors $E(X|G) \leq E(Y|G)$

(c) $E(E(X|G)) = E(X)$

(d) Si X est G-mesurable $E(X|G) = X$

(e) Si Y est G-mesurable bornée

$E(XY|G) = Y E(X|G)$

(F) Si X est independent de G

$E(X|G) = E(X)$

Déf : (cas discret : Mg) Une suite de V.a réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Une $\mathcal{F}_n$ martingale si :

(d_1) X_n est $\mathcal{F}_n$-adapté

(d_2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est intégrable, ie : Si $E(|X_n|) < +\infty$

(d_3) $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ P.S pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déf : (Cas continues : Mg) : Un processus M est un $(\mathcal{F})_t$ Mg si : (c_1) M est $(\mathcal{F})_t$-adapté

(c_2) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, M_t intégrable, ie si $E(|X_n|) < +\infty$.

(c_3) $E(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$ P.S pour tout $0 \leq s \leq t$

Remarque : (1) Une sur_Mg pour les cas discret (continu) est Un processus qui verifier les deux premières propriétés (d_1) et (d_2) (c_1 et c_2) et :

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$(E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t)$

Dans la suite, On se donne Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ Un processus

$(B_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace.

<u>EXP</u>: Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a de carré intégrable indep. et iid. On note n la moyenne de X_1 et σ^2 sa variance, on pose $S_0 = 0$, $M_0 = 0$, $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour tout $n \geq 1$,

$S_n = X_1 + \dots + X_n$, $M_n = S_n - nm$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$

(1) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une Mg par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

<u>Solution</u>: La filtration $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle.

alors la mesurabilité:

- X_n est carrée intégrable alors $E(X_n) < +\infty$
- $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \overset{?}{=} M_n$

$M_n = S_n - mn$

$M_{n+1} = S_{n+1} - (n+1)m = S_n + X_{n+1} - nm - m$

$= M_n + X_{n+1} - m$

$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(M_n + X_{n+1} - m | \mathcal{F}_n)$

$= M_n + E(X_{n+1}) - m$

$= M_n + m - m$

$= M_n$

Mouvement Brownien :

L'exemple basique de processus est le Mouvement Brownien, nous donné par la botaniste Robert en 1827 pour décrire le mouvement irrégulier de particules de poller dans un fluide. Le cadre d'application du MBS a largement dépassé l'étude des particules microscopique pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'action historiquement depuis Bachelier en 1900

<u>Def</u>: MBS : est un processus contenu et $\mathbb{R}^+$ tq :

(1) $B_0 = 0$

(2) $B_t, t\geq 0$ est à accroissement indépendent $(B_t - B_s) + \mathcal{F}_s = \sigma(B_t, 0 \leq t \leq s)$ $\forall t \geq s \geq 0$

(3) $(B_t)_{t\geq 0}$ si t accroissement stationnaire $B_t - B_s \sim B_{t-s}$

$B_t - B_s \sim B_{t-s} - B_0 \quad \forall t \geq s \geq 0$

B_t suit un loi gaussien.

$N(0,t) \quad \forall t > 0$

b/ $(B_t)_{t\geq 0}$ est à trajectoire continue

Propriétés fondamentales

(1) Moments et Covariance

- $E(B_t) = 0$
- $Var(B_t) = t$
- $Cov(B_t, B_s) = \min(t,s)$

(2) Propriété martingale

Le MB $(B_t)_{t\in T}$ est un MG par rapports à la fonction naturelle

(3) Non differetiebilité

Les trajectoires du MB sont continues mais nulles part dérivable

- $E(B_t) = E(B_t - B_0) \Rightarrow B_t - B_0 \sim$

$N(0, t-0) : N(0,t)$, $E(B_t) = 0$

$Var(B_t) = t$

- $Cov(B_t, B_s) = E(B_t, B_s) - \overset{\to 0}{E(B_t)} E(B_s)$

$= E(B_t \cdot B_s)$

$= E((B_t - B_s) B_s) \quad t > s$

- $E((B_t - B_s)B_s) + E(B_s^2) =$

$E(\overset{\to 0}{B_t - B_s}) E(B_s) + E(B_s^2)$

$= E(B_s)^2$?

- $Var(B_s) = E(B_s^2) - E^2(B_s)$

$s = E(B_s^2)$

- $Cov(B_t, B_s) = s = \min(t,s)$

- $(B_t)_{t\in T}$ est MG

(1) La filtration est sa filtration naturelle alors mesurabilite.

(2) $(B_t)_{t\in T} \in L^1(\Omega, f, P)$

$E(B_t / f_s) \overset{?}{=} B_s$

$= E(B_t - B_s + B_s / f_s)$ B_s car elle est f_s mesurable

$= E(B_t - B_s / f_s) + E(\cancel{B_s} / f_s)$

$= E(B_t - B_s / f_s) + B_s$

$= \overset{\to 0}{E(B_t)} - \overset{\to 0}{E(B_s)} + B_s \to$ indp

Donc B_t est une Martingale.

Déf : Soit (Ω, f, f_t, P) un espace probabilisé filtré $(H_t)_{t\in T}$ est un processus prévisible

(6)

"Si H_{t+1} est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Integrale stochastique

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ Un MBS par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$, soit $t > 0$ fixée ($\neq$ temps d'arrêt) notre but de construire integrale stochastique $\left(\int_S^t H_s dB_s, t \in [0,T]\right)$ pour un processus prévisible (H_t) Vérifiant certaines propriétés. Pour cela, On procède en plusieurs étapes (Cf construction de l'espérance)

Remarque : En mathématique financières, T représente l'horizon du marché (désormais, On travaillera toujours à horizon fini, Ce qui simplifier des choses) (B_t) represente l'évaluation du prise d'Un actif (H_t) la stratégie d'investissement sur cet actif et $\int_0^t H_s dB_s$ la gain réalisé au temps t

avec la stratégie H.

De la même manière qu'à temps discret (H_t) doit être "Previsible" pour qu'il n'y ait pas délit d'initié

Proposition : On a les égalités suivants :

- $E((HB)_t) = 0$
- $E((HB)_t^2) = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$ Le seconde égalité ci dessus est appellée l'isométrie d'Itô.

Remarquer que si $H(t) = 1$ alors on retrouve l'égalité $E(B_T^2) = T$

Formules d'Itô

Jusqu'a présent, on a défini l'integrale stochastique mais il nous manque encore des régles de calcul la première de calcul est la suivante théorème :

Soit $(B_t, t\in\mathbb{R}^+)$ Un MBS par rapports à $(\mathcal{F}_t, t\in\mathbb{R}^+)$ et $f\in C^2(\mathbb{R})$ (ie $f. f'$) sont des fonction continues on suppose de plus que

$$E\left(\int_0^t (f'(B_s))^2 ds\right) < \infty \ldots (4)$$

Alors pour tout $t>0$

$$f(B_t)-f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds \quad P.S \ldots (5)$$

Remarque: Vu que $(f'(B_t), t\geq 0)$ est Un processus continu et adapte à $(\mathcal{F}_t)$ et que la Condition (4) est Vérifiée, $\int_0^t f'(B_s)\,dBs$ est bien définie (et $\int_0^t f'(B_s)\,ds$ l'est également car l'application $s \to f''(Bs)$ est continu)

- Le second terme du membre de droit dans (5) (absent dans les régles de Calcul différantiel "Classique") est applé term d'Itô, (8) il resulte de la Variation quadratique non nulle du MB.

Exemple: appliquer la formule d'Itô suivant :

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

(2) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,ds$$

(3) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$

$$e^{B_t} - 1 = \int_0^t e^{B_s}\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}\,ds$$

Théoréme: Soient (B_t) Un MBS et $f\in C^{1,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ (ie $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continu) tq:

$$E\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\right)^2 ds\right) < \infty \quad \forall t>0$$

Alors pour tout $t>0$:

$$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B)\,ds \quad P.S$$

Exemple: $f(t, x) = x^2 . t$

$$f(t, x) = e^{x - \frac{t}{2}}$$

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -1$

$B_t^2 - t = -\int_0^t ds + \int_0^t 2B_s \, dB_s + \int_0^t ds$.

$B_t^2 - t = \int_0^t 2B_s \, dB_s$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x - \frac{t}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x - \frac{t}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} e^{x - \frac{t}{2}}$

$e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1 = \frac{-1}{2} \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} ds + \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} ds$

$e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s$.

Le Processus $(Z_t = e^{B_t - \frac{s}{2}})$ est donc Une Martingale exponontielle associée au MBS. De plus, il stifaut l'epation différentielle stochastique $Z_t - 1 = \int_0^t Z_s \, dB_s$ ie :

$dZ_t = Z_t \, dB_t$ et $Z_0 = 1$

Equation differentielle stochastique

Le but des équation différentiells stochastique est de fournir modèle mathematique pour Une équation différentielle perturbée par Un bruit aléatoire. Partant d'une équation differentielle ordinaire de la forme :

$$X'(t) = b(X(t))$$

Soit encore sous la forme differentielle $dX_t = b(X_t)\, dt$

Une telle equation est utilisée pour décrire l'evolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbation aléatoire on ajoute Un terme de bruit qui sera de la forme $S \, dB_t$ designe Un MB et S pour l'instant Une constant qui corespond à l'instensité du bruit on à Une equation différentille "stochastique" de la forme

$$dX_t = b(X)dt + \sigma dB_t$$

On encore sous forme intégrale la seule qui ait un sens mathématique :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \sigma B_t$$

Soit encore sous la forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$$

Remarquant que le sens donné a cette équation depend de la théorie de l'intégrale stochastique qui est un très bel outil mathématique.

Equation homogènes en temps :

On a vu que $X_0 = e^{Bt}$ (aussi appelé MB géométrique) est solution de l'équation.

$$X_t - 1 = \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,ds + \int_0^t X_s\,dB_s$$

qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t\,dt + X_t\,dB_t \text{ et } X_0 = 1$$

De la même façon, on peut voir que

$$X_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

(avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixé) est solution de :

$$dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t \text{ et } X_0 = 1$$

Cette équation est appelée l'équation est appelée l'équation de Blache & schols μ est appelé le coefficient de dérive (il traduit la tendance général du processus) et σ le coefficient de diffusion (il traduit la variabilité ou encore la "valatilité du processus). Cette équation ou des généralisation de celle-ci sont couramment utilisé en math financières pour décrire.

De manière plus générale, on considère le problème suivante. Etant donnés (B_t) un MBS, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe t-il un processus (X_t) qui

Vérifier :

$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t \quad X_0 = x_0$

(dans l'exemple présédent, $f(x) = \mu x$ et $g(x) = \sigma x$). Pour répondre à cette question on a besoin de la définition suivante.

<u>Déf</u> : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite (globalement) lipschitzienne s'il existe $K \geq 0$, tq :

$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Remarque : Si f est lipschitzienne, alors f est Uniformement continue (et donc continue) sur $\mathbb{R}$

- Si f est continûment dérivable et f' est bornée, alor f est lipchitzienne. En effet

$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(z)dz\right| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}} |f'(z)| \cdot |y - x|$

<u>théoreme</u> : Soient $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ Un MBS (p.r. à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$), $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, g lipschitziennes. Alors il existe Un Unique processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tq :

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s$$

P.S $\forall t \in \mathbb{R}_+$

De plus $E(\sup_{0\leq t\leq T} X_t^2) < \infty$ pour $T > 0$

Remarque : la solution (X_t) de l'équation ci dessus est également appelée Une solution fort solution faible présente au paragraphe qui précident)

On appelle $f(X_t)$ le terme de dérive de l'equation et $g(X_t)$ le terme de diffusion.

Demonstration (idée principale) : on définit

$X_T = \{X_t, t \in [0,t]$. Continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$ tq :

$E(\sup X_t^2 < \infty)\} \dots (7)$

Noter que l'espace Vectoriel X_T muni de la norme $\|X\|_{T,2}^2 = E(\sup_{0 \le t \le T} X_t^2)$ est complet. Pour trouver le processus $X \in X_t$ solution de (7), on utilise la méthode classique dite "Méthode d'intération de Picard" récursive

$X_t^{(0)} = x_0$, $X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t f(X_s)\,ds + \int_0^t g(X_s)^{(n)}\,dB_s$

il se trouve que la suit $(X^{(n)})$ est une suite de Cauchy dans X_T, donc elle converge car (X_T) est complet et on montre que la limite de la suite est solution de (7) De plus, on montre que si (X_t) et (Y_t) sont des solutions de (7) alors $X_t = Y_t$ P.S pour tout $t \in \mathbb{R}$

pour chaque étape, on a recours à l'estimation centrale suivante (qui se démontre en utilisent notamment l'inégalité de Doob (6) et l'isométrie d'Itô, si on pose

$\Phi(Y)_t = x_0 + \int_0^t f(Y_s)\,ds + \int_0^t g(Y_s)\,dB_s$, alors :

$E(\sup(\Phi(Y)_t - \Phi(Z)_t)^2 \leq K\, E(\int_0^T (Y_s - Z_s)^2 ds)$

Exemple : L'équation Black & Schooles :

$dX_t = \mu X_t\,dt + \Sigma X_t\,dB_t$ $\quad X_0 = x_0$

$\mu \in \mathbb{R}$ et Σ, $X_0 > 0$ fixé

(المضروب في dt هو $b(x)$ والي مضروب
في dB_t هو $\sigma(X_t)$)

(قابلة للاشتقاق و المشتقة محدودة)

$b(X_t) = \mu X_t \longrightarrow$ lipschitzienne

$\sigma(X_t) = \sigma = C^{te} \to$ lipschitzienne

L'equation de B,S admet une solution forte et unique.

Exemple : Soit $a, x_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ fixés. Considère l'EDS.

$dX_t = -aX_t\,dt + \sigma\,dB_t$ et $X_0 = x_0$

Les fonctions $f(x) = -ax$ et $g(x) \equiv \sigma$ sont lipschitziennes donc il existe un unique processus (X_t) solution de l'équation ci-dessus, le processus appelé le processus d'Onstein-Uhlenbeck.

$\cdot\, dX_t = \sin(X_t)\,dt + \cos(X_t)\,dB_t$

$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$

$\lim \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k$

On a : $b(X_t) = \sin(X_t)$, et $\sigma(X_t) = \cos(X_t)$ sont lipschitziennes (car b' et σ' sont bornées).

Exemple : Soit $a > 0$ on considère l'EDS.

$$dX_t = \frac{a}{X_t}\,dt + dB_t \text{ et } X_0 = 1$$

La fonction $b(X_t) = \frac{a}{X_t}$ n'est pas lipschitzienne en 0 ($f'(0) = -\infty$) tout fois il existe une unique solution (forte) à l'équation (appelée Processus de Bessel).

La raison intuitive pour laquelle ceci est vérifié est que sitôt que le processus X_t se rapproche de 0 (l'endroite ou $f(x)$ n'est pas lipschitzienne) il est fortement repoussé vers le haut par le terme de dérive $\frac{a}{X_t}$ (notre toute fois que si a est petit, des choses étranges commencent à se produire

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$, On considère L'EDS :

$dX_t = aX_t\,dt + \sqrt{X_t}\,dB_t$ et $X_0 = 0$

et

$dX_t = Sgn(X_t)\,dB_t$ et $X_0 = 0$

la fonction :

$$g(x) = Sgn(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solution

. La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschizienne en ($g'(0) = \infty$) et il n'existe pas de solution fort, mais une solution dite "faible" appelée processus de Feller est discontinue en 0 et donc n'est pas lipschizienne l'équation n'admet pas de solution fort mais seulement une solution faible

Equations inhomogènes en temps :

On considère le problème suivant. Etant donnés (B_t) Une MBS, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe-t-il Un processus (X_t) qui vérifier

$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dB_t$ $X_0 = x_0$

pour répondre à cette, On a besoin de la définition suivants.

Déf : Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite lipschizienne en x s'il existe Une constant $k > 0$ tq : $|f(t, y) - f(t, x)| \leq k(y - x)$; $\forall t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Théorème : Si $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues (conjointement en t et en x) et lipschizienne en x alors il existe Un Unique processus (X_t) solution de l'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(s,X_s)\,ds + \int_0^t g(s,X_s)\,dB_s \text{ P.S}$$

A nouveau, le processus (X_t) est appelé Une solution fort de l'équation (et C'est Un processus d'Itô)

Équations Lineaires

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $a, \sigma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, Continues et Bornées, on appelle linéaire Une EDS de la forme

$$dX_t = a(t) X_t dt + \sigma(t) dB_t, \ X_0 = x_0 \quad (*)$$

Remarque : on pourrait avoir d'appeler " équation linéaire " Une équation du type :

$$dX_t = a(t) X_t\, dt + \sigma(t) X_t\, dB_t ..$$

qui Constitue Une généralisation de l'équation Black & schooles.

Déf : Soit $(\Phi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$d\Phi_t = a(t)\Phi_t dt \text{ et } \Phi_0 = 1$$

Remarque que $\Phi_t = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$

Proposition : L'équation $(*)$ admet Une Unique Solution forte (X_t) donnée par

$$X_t = \Phi_t x_0 + \int_0^t \frac{\Phi_t}{\Phi_s} \sigma(s)\, dB_s \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Démentration : il est clair que $f(t,x) = a(t)x$ et $g(t,x) = \sigma(t)$ sont Continues en (t,x) et lipschiziennes en x donc l'équation $(*)$ admet Une Unique solution. on écrit tout d'abord $X_t = \Phi_t Y_t$ d'où dédiut que :

$$\begin{aligned} dX_t &= d\Phi_t Y_t + dY_t \Phi_t \\ &= a(t) X_t dt + \sigma(t) dB_t \end{aligned}$$

$$\Phi_t \, dY_t = dX_t - d\Phi_t \, Y_t$$
$$= dX_t - (a(t)\Phi_t \, dt) Y_t$$
$$= dX_t - a(t) \underbrace{Y_t \Phi_t}\, dt$$
$$= dX_t - a(t) X_t \, dt$$
$$= \sigma(t) \, dB_t$$

$$\Phi_t \, dY_t = \sigma(t) \, dB_t$$

$$dY_t = \frac{\sigma(t)}{\Phi_t} dB_t$$

$$\Rightarrow Y_t = x_0 + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\Phi_s} dB_s$$

$$X_t = \Phi_t Y_t = \Phi_t \left(x_0 + \int_0^t \frac{\sigma(s)}{\Phi_s} dB_s \right)$$
$$= \Phi_t x_0 + \int_0^t \frac{\Phi_t \sigma(s)}{\Phi_s} dB_s$$

Solution faible:

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

on considère l'EDS

$$dX_t = f(X_t)\,dt + g(X_t)\,dB_t \text{ et } X_0 = x_0 \quad (**)$$

on donne la définition suivante, qui peut paraître étrange au premier abord.

Def: Une solution faible de l'equation $(**)$ est une processus continu (X_t) tq: les processus (M_t) et (N_t) définis respectivement par:

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_s)\,ds \text{ et}$$

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t g(X_s)\,ds \text{ sont}$$

des martingales

Remarque: le MBs (B_t) a disparu de la définition de solution faible! Ainsi, une solution faible d'une EDs est une solution en loi, mais plus du tout une solution "trajectorielle" de l'équation $(**)$ la justification de cette déf est donnée ci-dessous