باب 4

الحساب المثلثي

1.4 النسب المثلثية في المثلث القائم

تعريف 1.4: النسب المثلثية في مثلث قائم

ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية في A. نعرّف النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة $\theta = \angle B$ كما يلي:

- الجيب **(Sine)**: $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC}$
- جيب التمام **(Cosine)**: $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC}$
- الظل **(Tangent)**: $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AC}{AB}$
- ظل التمام **(Cotangent)**: $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\tan\theta}$

نظرية 1.4: علاقة أساسية بين النسب المثلثية

من تعريف النسب المثلثية في مثلث قائم نستنتج العلاقة الأساسية:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

وذلك بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على أضلاع المثلث.

مبرهنة 1.4: خواص النسب المثلثية للزوايا المتممة

إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم، فإن:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

ملاحظة 1.4

النسب المثلثية تعتمد فقط على قياس الزاوية وليس على أطوال أضلاع المثلث، لأن النسبة بين الأضلاع متجانسة.

نظرية 2.4: نسب مثلثية لزوايا خاصة

القيم الدقيقة للنسب المثلثية لبعض الزوايا الشائعة:

- للزاوية 30°: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- للزاوية 45°: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$
- للزاوية 60°: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

مبرهنة 2.4: المتباينات المثلثية

لأي زاوية حادة θ في مثلث قائم:

$$0 < \sin\theta < 1, \quad 0 < \cos\theta < 1, \quad \tan\theta > 0$$

ويكون $\sin\theta$ تزايدياً و $\cos\theta$ تناقصياً في الفترة $(0^\circ, 90^\circ)$.

2.4 الدائرة المثلثية

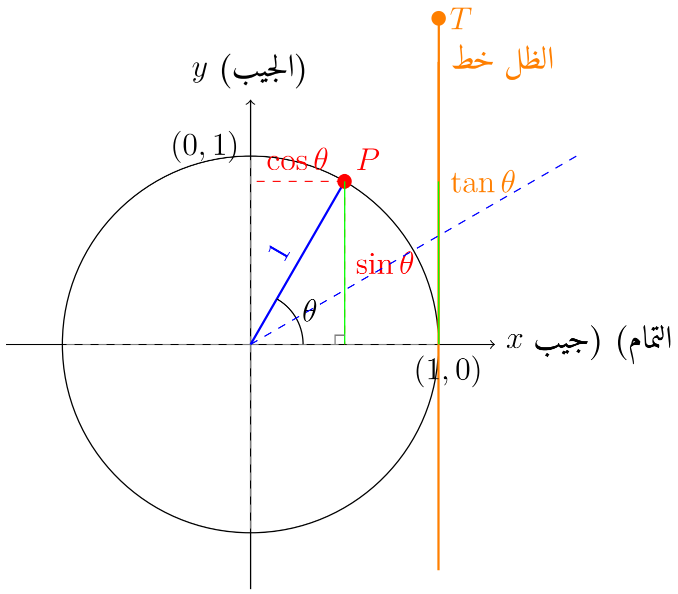
تعريف 2.4: الدائرة المثلثية

الدائرة المثلثية هي دائرة نصف قطرها يساوي 1 ومركزها نقطة الأصل في المستوى الإحداثي.
تُعرّف النسب المثلثية لأي زاوية θ (بالراديان أو الدرجات) على النحو التالي:

- إذا كان $P(x, y)$ نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية θ مع الدائرة المثلثية، فإن:

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

- المسافة من نقطة الأصل إلى P تساوي 1: $x^2 + y^2 = 1$



شكل 1.4: الدائرة المثلثية توضح الجيب وجيب التمام والظل

3.4 دساتير الجمع

نظرية 3.4: دستور جمع الجيب وجيب التمام

لكل زاويتين α و β:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

برهان 1.4: برهان شامل لدساتير الجمع باستخدام الجداء السلمي

سنبرهن العلاقات الأربع خطوة بخطوة باستخدام الجداء السلمي ثم الزوايا المتممة.

1. برهان $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

الخطوة 1: نأخذ متجهين وحدة على الدائرة المثلثية:

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

طولهما: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$.

الخطوة 2: الجداء السلمي:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

الخطوة 3: لكن الجداء السلمي يعرف هندسياً بـ:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين.

الخطوة 4: الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي $\alpha-\beta$ (بافتراض $\alpha>\beta$):

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$$

الخطوة 5: بمساواة التعبيرين:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \blacksquare$$

2. استنتاج $\cos(\alpha+\beta)$

نعوض β بـ $-\beta$ في النتيجة السابقة:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

بما أن $\cos(-\beta) = \cos\beta$ و $\sin(-\beta) = -\sin\beta$:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \blacksquare$$

3. حساب $\sin(\alpha+\beta)$ باستخدام الزوايا المتممة

نستخدم العلاقة $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

نطبق قانون جمع جيب التمام للفرق الذي برهناه في القسم 1:

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

باستخدام خواص الزوايا المتممة:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

إذن:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \blacksquare$$

4. استنتاج $\sin(\alpha-\beta)$

نعوض β بـ $-\beta$ في النتيجة السابقة:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \blacksquare$$

نظرية 4.4: دستور جمع الظل وظل التمام

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

برهان 2.4: برهان دستور جمع وظل التمام

1. برهان $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

الخطوة 1: نستخدم تعريف الظل:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

الخطوة 2: نعوض بقيمتي الجيب وجيب التمام للمجموع:

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

الخطوة 3: نقسم البسط والمقام على $\cos\alpha\cos\beta$ (بفرض $\cos\alpha \neq 0$ و $\cos\beta \neq 0$):

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

الخطوة 4: نبسط الكسور:

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

الخطوة 5: نعوض بـ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \blacksquare$$

2. برهان $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

الطريقة 1: باستخدام التعويض $\beta \to -\beta$:

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

بما أن $\tan(-\beta) = -\tan\beta$:

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha(-\tan\beta)} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \blacksquare$$

الطريقة 2: مباشرة من التعريف:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

القسمة على $\cos\alpha\cos\beta$:

$$= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \blacksquare$$

ملاحظة 2.4: نتائج مباشرة

من هذه الصيغ نستنتج:

- إذا كان $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ فإن $\tan\alpha\tan\beta = 1$
- إذا كان $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ فإن $\tan\alpha+\tan\beta = 1-\tan\alpha\tan\beta$
- $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ (بتعريف $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$)

4.4 دساتير التحويل

نظرية 5.4: دستور ضعف الزاوية

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

برهان 3.4: برهان دستور ضعف الزاوية

1. برهان $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$: نطبق دستور جمع الجيب مع $\alpha = \beta = \theta$:

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad \blacksquare$$

2. برهان $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$: نطبق دستور جمع جيب التمام مع $\alpha = \beta = \theta$:

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \blacksquare$$

3. الأشكال الأخرى لـ $\cos(2\theta)$: باستخدام $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \quad \blacksquare$$

4. برهان $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$: نطبق دستور جمع الظل مع $\alpha = \beta = \theta$:

$$\tan(2\theta) = \tan(\theta+\theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad \blacksquare$$

نظرية 6.4: دستور نصف الزاوية

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}, \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

برهان 4.4: برهان دستور نصف الزاوية

1. برهان $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$ و $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$:
من دستور ضعف الزاوية لـ $\cos\theta$:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

نحل من أجل $\sin^2\frac{\theta}{2}$:

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2} \quad \blacksquare$$

وبالمثل:

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

نحل من أجل $\cos^2\frac{\theta}{2}$:

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \quad \blacksquare$$

2. برهان $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$: باستخدام تعريف الظل:

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

نضرب البسط والمقام في $2\cos\frac{\theta}{2}$:

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

باستخدام $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$:

$$=\frac{\sin\theta}{2\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \blacksquare$$

3. برهان $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$: نضرب البسط والمقام في $2\sin\frac{\theta}{2}$:

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

باستخدام $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$ و $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$:

$$=\frac{2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \quad \blacksquare$$

نظرية 7.4: تحويل المجموع إلى حاصل ضرب

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

برهان 5.4: برهان تحويل المجموع إلى حاصل ضرب

نضع $\alpha = \frac{p+q}{2}$ و $\beta = \frac{p-q}{2}$، إذن $p = \alpha + \beta$ و $q = \alpha - \beta$.

1. برهان $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$:

$$\sin p + \sin q = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

باستخدام دساتير الجمع:

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \blacksquare$$

2. برهان $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$:

$$\sin p - \sin q = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$
$$= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \blacksquare$$

3. برهان $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$:

$$\cos p + \cos q = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \blacksquare$$

4. **برهان** $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$:

$$\cos p - \cos q = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \blacksquare$$

نظرية 8.4: تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

برهان 6.4: برهان تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

نبدأ من دساتير جمع الجيب وجيب التمام:

1. **برهان** $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$:

من دساتير الجمع:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

بجمع المعادلتين:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \quad \blacksquare$$

2. **برهان** $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$:

من دساتير الجمع:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

بجمع المعادلتين:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \quad \blacksquare$$

3. برهان $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$:

نطرح المعادلتين السابقتين لـ $\cos(\alpha\pm\beta)$:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$= 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \quad \blacksquare$$