باب 7

تفكيك الكسور الناطقة الى عوامل بسيطة

1.7 الكسور الناطقة

تعريف 1.7: الكسر الناطق

دالة كسرية (أو كسر ناطق) على الحقل $\mathbb{K}$ هي عنصر من حقل كسور متعددات الحدود $\mathbb{K}(x)$، أي أنها على الشكل:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x),Q(x)\in\mathbb{K}[x], \quad Q(x)\neq 0$$

نقول إن $R(x)$ **مختزل** إذا كان $\gcd(P(x),Q(x))=1$.

تعريف 2.7: الجزء الصحيح

لكل كسر ناطق $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، يمكن كتابته بشكل وحيد:

$$R(x)=E(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

حيث $E(x)\in\mathbb{K}[x]$ (الجزء الصحيح أو متعدد الحدود)، و $P_1(x)$ متعدد حدود درجة $\deg(P_1)<\deg(Q)$. يُستخرج $E(x)$ بواسطة **قسمة إقليدية** $P(x)$ على $Q(x)$.

تعريف 3.7: القطب ورتبة التضاعف

نقول إن $\alpha \in \mathbb{K}$ هو **قطب** للكسر الناطق $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ إذا كان $Q(\alpha) = 0$. إذا كان $(x-\alpha)^m$ يقسم $Q(x)$ ولكن $(x-\alpha)^{m+1}$ لا يقسمه، فإننا نقول إن للقطب α **رتبة تضاعف** m.

2.7 تفكيك الكسور الناطقة الى عوامل بسيطة

1.2.7 النظرية الأساسية

نظرية 1.7: النظرية الأساسية لتفكيك الكسور الناطقة

ليكن $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ كسراً ناطقاً مختزلاً مع $\deg(P) < \deg(Q)$. ليكن:

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{s}(x^2+p_jx+q_j)^{n_j}$$

في $\mathbb{R}[x]$ حيث $p_j^2 - 4q_j < 0$ (عوامل تربيعية غير قابلة للتحليل).
يوجد تفكيك وحيد لـ $R(x)$ إلى مجموع كسور بسيطة:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{i,k}}{(x-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{n_j}\frac{B_{j,\ell}x + C_{j,\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^\ell}$$

حيث $A_{i,k}, B_{j,\ell}, C_{j,\ell} \in \mathbb{R}$.

2.2.7 حالة الحقل $\mathbb{C}$

نظرية 2.7: التفكيك في $\mathbb{C}(x)$

في $\mathbb{C}[x]$، كل متعدد حدود غير ثابت يتحلل إلى عوامل خطية (حسب النظرية الأساسية للجبر).
لذا إذا كان $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-z_i)^{m_i}$ حيث $z_i \in \mathbb{C}$، فإن التفكيك يكون:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{i,k}}{(x-z_i)^k}$$

جميع $A_{i,k} \in \mathbb{C}$.

3.2.7 طرق عملية للتفكيك

1. طريقة المقارنة (المعامِلات غير المحددة)

مثال 1.7: عوامل خطية متميزة (حقيقي أو عقدي)

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

نضرب بـ $(x-1)(x-2)$:

$$x + 3 = A(x-2) + B(x-1)$$

$$x + 3 = (A+B)x + (-2A - B)$$

نظام المعادلات:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A - B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 5 \end{cases}$$

2. طريقة التعويض

مثال 2.7: عوامل خطية متميزة

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

لإيجاد A في $\frac{A}{x-1}$:

$$A = \left.\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)}\right|_{x=1} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$$

لإيجاد B في $\frac{B}{x-2}$:

$$B = \left.\frac{x^2+1}{(x-1)(x-3)}\right|_{x=2} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

وهكذا.

3. حالات خاصة: عوامل مكررة

مثال 3.7: قطب من رتبة 3

$$\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

ضع $t = x-1$ أي $x = t+1$:

$$\frac{(t+1)^2+2(t+1)+1}{t^3} = \frac{t^2+4t+4}{t^3} = \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} + \frac{4}{t^3}$$

إذن $A = 1, B = 4, C = 4$.

4. عوامل تربيعية لا تحلل في $\mathbb{R}$

مثال 4.7: مقام يحتوي على x^2+1

$$\frac{2x+3}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$$

نضرب بـ $(x^2+1)(x+1)$:

$$2x+3 = (Ax+B)(x+1) + C(x^2+1)$$

$$2x+3=(A+C)x^2+(A+B)x+(B+C)$$

نظام:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=2 \\ B+C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=5/2 \\ C=1/2 \end{cases}$$

4.2.7 الخوارزمية العامة

خوارزمية 1.7: خطوات تفكيك كسر ناطق $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

1. اختزل الكسر: $\gcd(P,Q)=1$.
2. إذا كان $\deg(P)\geq\deg(Q)$، أجر قسمة إقليدية لاستخراج الجزء الصحيح $E(x)$.
3. حلل $Q(x)$ إلى عوامل أولية في $\mathbb{K}[x]$.
4. اكتب شكل التفكيك حسب النظرية:
   - لكل عامل $(x-\alpha)^m$: $\sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$
   - لكل عامل $(x^2+px+q)^n$ (في $\mathbb{R}$ فقط): $\sum_{\ell=1}^{n}\frac{B_\ell x+C_\ell}{(x^2+px+q)^\ell}$
5. أوجد الثوابت A_k, B_ℓ, C_ℓ إما بـ:
   - ضرب الطرفين بـ $Q(x)$ ثم مقارنة معاملات متعدد الحدود الناتج.
   - التعويض بقيم خاصة لـ x (طريقة الهيفيسايد).

3.7 تمارين

تمرين 1.7: الجزء الصحيح

أوجد الجزء الصحيح للكسر الناطق $R(x) = \frac{x^3+2x^2-x+3}{x^2+x-2}$.

تمرين 2.7: تحليل المقام

حلل المقامات التالية إلى عوامل أولية في $\mathbb{R}[x]$ وفي $\mathbb{C}[x]$:

1. $Q_1(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2. $Q_2(x) = x^4 + 4$
3. $Q_3(x) = x^4 + 5x^2 + 6$

تمرين 3.7: تفكيك كسور بسيطة في $\mathbb{R}(x)$

فكك الكسور الناطقة التالية إلى كسور بسيطة في $\mathbb{R}(x)$:

1. $R_1(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$
2. $R_2(x) = \frac{x^2+3x+5}{(x-1)^2(x+3)}$
3. $R_3(x) = \frac{x^2+1}{x(x^2+4)}$

تمرين 4.7: تفكيك في $\mathbb{C}(x)$

فكك الكسور التالية إلى كسور بسيطة في $\mathbb{C}(x)$:

1. $S_1(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$
2. $S_2(x) = \frac{x^2+2}{x^3-1}$

تمرين 5.7: عوامل مكررة

فكك الكسور التالية مع وجود عوامل مكررة:

1. $T_1(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^3}$
2. $T_2(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2(x+1)}$

تمرين 6.7: عوامل تربيعية لا تحلل

فكك الكسور التالية التي تحتوي على عوامل تربيعية لا تحلل في $\mathbb{R}$:

1. $U_1(x) = \frac{2x^2-x+3}{(x^2+1)(x-1)}$
2. $U_2(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}$

تمرين 7.7: تحديد الثوابت

أوجد الثوابت A, B, C, D في التفكيك:

$$\frac{x^2+2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

وكذلك في:

$$\frac{3x^3-2x^2+x-4}{(x-2)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

تمرين 8.7: تطبيقات على التكامل

استخدم تفكيك الكسور الناطقة لحساب التكاملات التالية:

1. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
2. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-x}\,dx$

تمرين 9.7: حالات مركبة

فكك الكسور التالية التي تجمع بين عدة أنواع من العوامل:

1. $V_1(x) = \frac{x^4}{(x-1)^3(x+2)^2}$ (أوجد الجزء الصحيح أولاً)
2. $V_2(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$

تمرين 10.7: تمارين متنوعة

1. بين أنه إذا كان $R(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n}$ حيث $\deg(P) < n$، فإن معامل $\frac{1}{(x-a)^k}$ في التفكيك هو:
$$A_k = \frac{P^{(n-k)}(a)}{(n-k)!}$$
حيث $P^{(m)}$ هو المشتق من الرتبة m.
2. فكك $W(x) = \frac{1}{x^4+1}$ في $\mathbb{R}(x)$ وفي $\mathbb{C}(x)$.