

6.6 تمارين

تمرين 1.6

إيجاد كثير الحدود P من الدرجة الأقل أو المساوية لـ 3، بحيث يحقق الشروط التالية:

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2, \quad P(2) = 4.$$

تمرين 2.6

إجراء القسمة الإقليدية لكثير الحدود A على B في الحالات التالية:

$$A = 3X^5 + 4X^2 + 1, \quad B = X^2 + 2X + 3 \quad (أ)$$

$$A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, \quad B = X^3 + X + 2 \quad (ب)$$

$$A = X^4 - X^3 + X - 2, \quad B = X^2 - 2X + 4 \quad (ج)$$

$$A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, \quad B = X^2 - 5X + 4 \quad (د)$$

تمرين 3.6

تحت أي شرط على $a, b, c \in \mathbb{R}$ يكون كثير الحدود

$$X^4 + aX^2 + bX + c$$

قابلاً للقسمة على كثير الحدود

$$X^2 + X + 1?$$

تمرين 4.6

احسب القاسم المشترك الأكبر D لكثيري الحدود A و B الآتين. ثم أوجد كثيري الحدود U و V بحيث:

$$AU + BV = D.$$

(ا)

$$A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2, \quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

(ب)

$$A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X, \quad B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1.$$

تمرين 5.6

لأبى قيم من a يكون كثير الحدود

$$(X + 1)^7 - X^7 - a$$

يملك جذراً حقيقياً مضاعفاً؟

تمرين 6.6: جذور كثيرات الحدود في الأعداد الصحيحة

1. ليكن $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ كثير حدود من الدرجة $n \geq 1$ معاملات في \mathbb{Z} . برهن أنه إذا كان لـ P جذر في \mathbb{Z} ، فإن هذا الجذر يقسم a_0 .

2. هل لكثيرات الحدود $X^3 - X^2 - 109X - 11$ و $X^{10} + X^5 + 1$ جذور في \mathbb{Z} ؟

تمرين 7.6: إيجاد كثيرات الحدود بشروط قسمة خاصة

ابحث عن جميع كثيرات الحدود P التي تحقق:

$$\bullet P + 1 \text{ يقبل القسمة على } (X - 1)^4$$

$$\bullet P - 1 \text{ يقبل القسمة على } (X + 1)^4$$

إشارات: ابدأ بإيجاد حل خاص P_0 بإحدى الطريقتين التاليتين:

$$1. \text{ باستخدام علاقة ييزو بين } (X - 1)^4 \text{ و } (X + 1)^4$$

2. باعتبار مشتق كثير الحدود P'_0 والبحث عن كثير حدود بأقل درجة ممكنة

بين أن P يحقق الشرط إذا وفقط إذا كان كثير الحدود $P - P_0$ يقبل القسمة على $(X - 1)^4(X + 1)^4$ ، واستنتج جميع حلول المسألة.