

Chapitre

2

Approche de la fiabilité des équipements et des organes par des modèles spécifiques

2.1 Approche de la fiabilité par le modèle de Weibull

2.1.1 Description et formulation mathématique du modèle

En théorie des probabilités, la loi de Weibull, nommée d'après Waloddi Weibull en 1951, est une loi de probabilité continue. Elle est également une généralisation de la loi exponentielle.

Cette loi a été retenue pour représenter les durées de vie de pièces mécaniques comme les roulements à billes ou les engrenages.

Le modèle de Weibull correspond à un taux de défaillance constant, décroissant ou croissant.

Définition 2.1.1 –

On dit que la variable aléatoire continue T suit la loi de Weibull si sa densité de probabilité a pour expression :

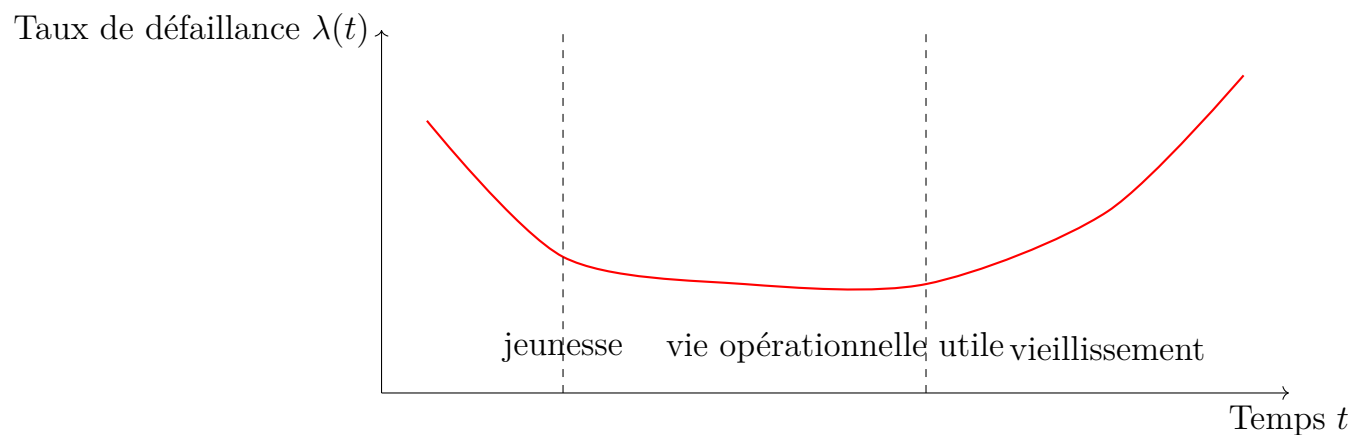
$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta} \right].$$

- β : appelé paramètre de forme ($\beta > 0$), souvent il est égal, inférieur ou supérieur à 1.
- w : appelé paramètre d'échelle ($w > 0$), parfois nommé “caractéristique de vie”.

- γ : appelé paramètre de position ($-\infty < \gamma < +\infty$). Il définit un changement d'origine dans l'échelle de temps.

Remarques 2.1.1 1. La loi de Weibull permet de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif, souvent appelées la **courbe en baignoire** :

- **jeunesse (early failures)** ;
- **vie opérationnelle utile** (taux de défaillance faible et constant) ;
- **vieillesse** (usure, taux de défaillance croissant).



Courbe de taux de défaillance en *baignoire*.

- Pour $\gamma = 0$, $\beta = 1$, $f(t) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}}$, la distribution exponentielle.
- Pour $\gamma = 0$, nous parlons de loi de Weibull de deux paramètres (β, η) .

Expression mathématiques

Le modèle de Weibull est caractérisé par :

1) Fonction de fiabilité $R(t)$

La fonction de fiabilité est donnée par :

$$R(t) = \int_t^\infty f(u) du = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{w}\right)^\beta} \quad (t \geq \gamma)$$

et

$$R(t) = 1 \quad \text{si } t < \gamma.$$

2) Fonction de défaillance $F(t)$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}.$$

3) Taux de défaillance

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{w} \left(\frac{t-\gamma}{w} \right)^{\beta-1}.$$

Allure des taux de défaillance d'une loi de Weibull pour différentes valeurs de β

De l'expression mathématique du taux de défaillance $\lambda(t)$, on remarque qu'il dépend de trois paramètres : β , γ , η , comme la loi de Weibull, mais suivant que les valeurs de β le taux de défaillance peut être constant, croissant ou décroissant.

— **Si** $0 < \beta < 1$: le taux de défaillance est **décroissant**.

— **Si** $\beta = 1$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta}$$

Il est constant : c'est le cas de la loi exponentielle.

— **Si** $\beta > 1$: le taux de défaillance est **croissant**.

— **Si** $1 < \beta < 2$: le taux de défaillance est **fort au début et faible ensuite**.

— **Si** $\beta > 2$: le taux de défaillance croît faiblement au début puis plus fortement à la fin.

— **Si** $\beta = 2$: le taux de défaillance est **linéaire**.

4) Temps moyenne de bon fonctionnement (MTBF)

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \gamma + A\eta.$$

où Γ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La Variance

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \sigma = B\eta$$

A et B sont des paramètres donnés par les tables ci jointe (calculés à partir de la loi Gamma).

5) Durée de vie associée à un seuil de fiabilité

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{v}\right)^\beta}$$

$$\ln R(t) = -\left(\frac{t-\gamma}{v}\right)^\beta$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{R(t)} = \left(\frac{t-\gamma}{v}\right)^\beta.$$

$$\Rightarrow \frac{t-\gamma}{\eta} = \left(\ln \frac{1}{R(t)}\right)^{1/\beta}$$

Donc :

$$t = \eta \left(\ln \frac{1}{R(t)}\right)^{1/\beta} + \gamma$$

2.2 Détermination des paramètres de Weibull

Papier de Weibull

La courbe est tracée sur un papier spécial appelé **papier de Weibull** ou **papier d'Allen-Plait**, ce qui permet d'obtenir une droite et de simplifier les calculs.

Le papier « Log-Log » possède quatre axes :

- L'axe A = axe des temps t .
- L'axe B = axe des $F(t)$ sur lequel nous portons les valeurs $F(t_i)$.

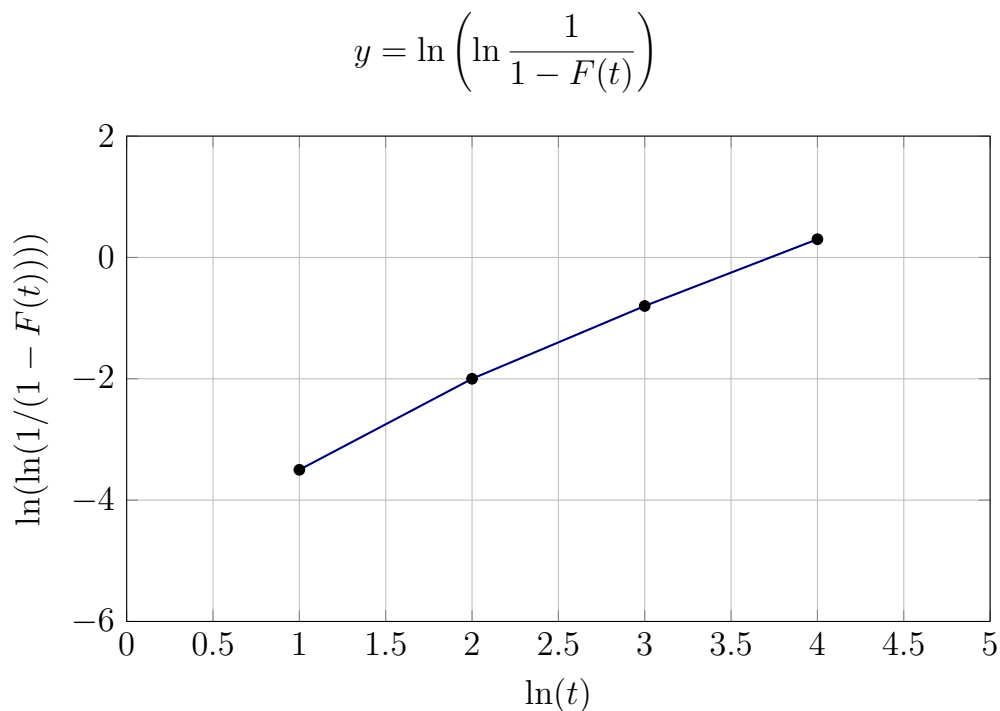
—

$$\text{Axe } a : \quad x = \ln(t)$$

—

$$\text{Axe } b : \quad y = \ln \left(\ln \frac{1}{1 - F(t)} \right)$$

Cet axe permet d'évaluer la valeur du paramètre β .



2.3 Exemple numérique complet

On considère les temps de défaillance suivants (en heures) :

$$t_i = \{100, 150, 200, 280, 350, 420, 500\}$$

Étape 1 : Classement et calcul des probabilités estimées

On utilise la formule de Benard :

$$F(t_i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$$

Avec $n = 7$:

$$F(t) = \{0.09, 0.22, 0.35, 0.48, 0.61, 0.74, 0.87\}$$

Étape 2 : Transformation linéaire

Pour chaque valeur :

$$X_i = \ln(t_i)$$
$$Y_i = \ln\left(\ln\frac{1}{1 - F(t_i)}\right)$$

Tableau de calcul

t_i	$F(t_i)$	$\ln(t_i)$	$\ln(\ln(1/(1 - F(t_i))))$
100	0.09	4.605	-2.407
150	0.22	5.011	-1.514
200	0.35	5.298	-0.968
280	0.48	5.636	-0.375
350	0.61	5.857	0.088
420	0.74	6.040	0.553
500	0.87	6.214	1.176

2.4 Estimation des paramètres

La droite obtenue en régression linéaire :

$$Y = 1.62X - 10.03$$

Donc :

$$\beta = 1.62$$

et

$$-\beta \ln(\eta) = -10.03$$

$$\ln(\eta) = \frac{10.03}{1.62} = 6.19$$

$$\eta = e^{6.19} \approx 488 \text{ heures}$$

2.5 Résultat final

$$\boxed{\beta = 1.62}$$

$$\boxed{\eta = 488 \text{ heures}}$$

Ces paramètres sont cohérents avec une Weibull à **taux de défaillance croissant** ($\beta > 1$).

2.5.1 Linéarisation de la loi de Weibull

Afin de simplifier l'utilisation de la loi de Weibull, on procède à sa linéarisation.

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

La fonction de fiabilité est :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

On prend le logarithme :

$$\ln(1 - F(t)) = -\left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta$$

D'où :

$$\ln\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right) = \left(\frac{t - \gamma}{\eta}\right)^\beta$$

Puis :

$$\ln\left(\ln\frac{1}{1 - F(t)}\right) = \beta \ln(t - \gamma) - \beta \ln \eta$$

Ce qui conduit à une équation de droite permettant d'estimer β et η .

β	A	B	β	A	B	β	A	B
			1.50	0.9027	0.613	4.0	0.9064	0.254
			1.55	0.8994	0.593	4.1	0.9077	0.249
			1.60	0.8966	0.574	4.2	0.9089	0.244
			1.65	0.8942	0.556	4.3	0.9102	0.239
0.20	120	1901	1.70	0.8922	0.540	4.4	0.9114	0.235
0.25	24	199	1.75	0.8906	0.525	4.5	0.9126	0.230
0.30	9.2605	50.08	1.80	0.8893	0.511	4.6	0.9137	0.226
0.35	5.0291	19.98	1.85	0.8882	0.498	4.7	0.9149	0.222
0.40	3.3234	10.44	1.90	0.8874	0.486	4.8	0.9160	0.218
0.45	2.4786	6.46	1.95	0.8867	0.474	4.9	0.9171	0.214
0.50	2	4.47	2.00	0.8862	0.463	5.0	0.9182	0.210
0.55	1.7024	3.35	2.10	0.8857	0.443	5.1	0.9192	0.207
0.60	1.5046	2.63	2.20	0.8856	0.425	5.2	0.9202	0.203
0.65	1.3663	2.18	2.30	0.8859	0.409	5.3	0.9213	0.200
0.70	1.2638	1.85	2.40	0.8865	0.393	5.4	0.9222	0.197
0.75	1.1906	1.61	2.50	0.8873	0.380	5.5	0.9232	0.194
0.80	1.1330	1.43	2.60	0.8882	0.367	5.6	0.9241	0.191
0.85	1.0880	1.29	2.70	0.8893	0.355	5.7	0.9251	0.188
0.90	1.0522	1.17	2.80	0.8805	0.344	5.8	0.9260	0.185
0.95	1.0234	1.08	2.90	0.8917	0.334	5.9	0.9269	0.183
1.00	1.0000	1.00	3.00	0.8930	0.325	6.0	0.9277	0.180
1.05	0.9603	0.934	3.10	0.8943	0.316	6.1	0.9286	0.177
1.10	0.9649	0.878	3.20	0.8957	0.307	6.2	0.9294	0.175
1.15	0.9517	0.830	3.30	0.8970	0.299	6.3	0.9302	0.172
1.20	0.9407	0.787	3.40	0.8984	0.292	6.4	0.9310	0.170
1.25	0.9314	0.750	3.50	0.8997	0.285	6.5	0.9318	0.168
1.30	0.9236	0.716	3.60	0.9011	0.278	6.6	0.9325	0.166
1.35	0.9170	0.687	3.70	0.9025	0.272	6.7	0.9333	0.163
1.40	0.9114	0.660	3.80	0.9038	0.266	6.8	0.9340	0.161
1.45	0.9067	0.635	3.90	0.9051	0.260	6.9	0.9347	0.160

TABLE 2.1 – Coefficients A et B de la loi de Weibull