توزيع كاي مربع

لهذا التوزيع علاقة بالتوزيع الطبيعي وله عدة تطبيقات منها: اختبارات جودة المطابقة والتجانس والاستقلالية والتبايم.

1.دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير كاي تربيع:

نقول أن المتغير العشوائي x يتبع توزيع كاي تربيع (λ^2) بـ n درجة الحرية إذا كانت دالة كثافة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\; x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

2. المميزات العددية:

1.2. التوقع الرياضي:

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x\, f(x) dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

نضع: $y = \frac{x}{2}$

$$E(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} (2y)^{\frac{n}{2}}\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}}\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} y^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1}\, e^{-y} dy$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n$$

$$E(X) = n$$

2.2. التباين:

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2\ f(x)dx=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}+1}\, e^{-\frac{x}{2}}\quad dx$$

بوضع:

$$y=\frac{x}{2}\Longrightarrow 2y=x\Longrightarrow dx=2dy$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}(2y)^{\frac{n}{2}+1}\, e^{-y}dy$$

$$=\frac{2^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}(y)^{\frac{n}{2}+2-1}\, e^{-y}dy$$

$$=\frac{2^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)$$

$$=\frac{2^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=n(n+2)$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=n(n+2)-n^2=2n$$

$$V(X)=2n$$

3.2. الدالة المولدة للعزوم:

$$m_x(t)=E[e^{xt}]=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} e^{xt}\, x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2}(1-2t)x}dx$$

بوضع:

$$y=\frac{1-2t}{2}\Longrightarrow x=\frac{2y}{1-2t}\Longrightarrow dx=\frac{2}{1-2t}dx$$

ومنه:

$$m_x(t)=\frac{2}{(1-2t)2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}-1}\quad e^{-y}\ dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \, e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$m_x(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

و بما أن دالة الكثافة لهذا التوزيع تعتمد على n فلكل قيمة لـ n يكون لهذه الدالة شكل خاص بها لذا وضعت جداول خاصة لهذا التوزيع لقيم n لحساب الاحتمالات تحت هذا التوزيع، بحيث:

$$p\left(\lambda_n^2 < \lambda_{n;\alpha}^2\right) = \int_{0}^{\lambda_{n;\alpha}^2} f(x) \, dx = \alpha$$