المحاضرة الخامسة: توزيع قاما

تمهيد:

لقد أشتق اسم توزيع قاما من دالة رباعية تدعى دالة قاما التي لها دور مهم في تعريف العديد من التوزيعات الاحتمالية مثل توزيع قاما، توزيع بيتا، توزيع كاي تربيع وغيرها.

1. دالة قاما:

إذا كان $\propto$ عدد حقيقي موجب تعرف دالة كما يلي:

$$\Gamma(\propto) = \int_{0}^{+\infty} x^{\propto-1}\, e^{-\propto} dx \qquad \propto > 0$$

ونريد إثبات:

$$\Gamma(\propto) = (\propto -1)\Gamma(\propto -1)$$

نضع:

$$u = x^{\alpha-1} \Longrightarrow du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}\, dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(\alpha) = -x^{\alpha-1}e^{-x}|_0^{+\infty} + (\alpha-1)\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-x}\, e^{-x}dx$$
$$= 0 + (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

ومنه:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

وبنفس الطريقة:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)(x-3)\ldots\ldots..3\times 2\times\Gamma(1)$$
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\ldots.3\times 2\times 1 = (\alpha-1)!$$

وفي كثير من التطبيقات الاحصائية يتطلب إيجاد $\Gamma(\propto)$ عندما يكون $\propto$ عدد صحيح موجب أو على الصيغة:

$$\alpha = \frac{2n+1}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)-1\right)$$

$$= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots.\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. قانون احتمال توزيع قاما:

نقول عن المتغير العشوائي x أنه خاضع لتوزيع قاما ذي المعلمتين الموجبتين n، $\propto$ ونكتب:

$$X \rightsquigarrow \Gamma(\propto; n)$$

إذا كان قانون احتماله معرفا كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \propto^n x^{n-1} e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

القيم العددية المميزة لمتغير توزيع Γ قاما:

$$E(x) = \frac{n}{\alpha}$$

$$V(x) = \frac{n}{\alpha^2}$$

3. تابع توزيع قاما:

$$F(x) = p(X \leq x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x x^{n-1} e^{n-x} dx$$