Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 1

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester I

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 4

Exercise 01:

From the following functions, determine which ones are of the same order (as $x \to 0$), which ones are of higher order, and which ones are of lower order. Express your answers using Landau notation.

من بين الدوال التالية $(x \to 0)$ ما هي تلك التي لها نفس رتبة مع x وأيضا رتبة أعلى ورتبة أدنى في الصغر من x ، ثم أكتبها باستعمال ترميز لينداو :

1) x^2, 2) $\sqrt{x^2+x^4}$, 3) $\sin(3x)$, 4) $2x\cos(x^3)\tan^2(x)$, 5) e^{2x}.

Exercise 02:

1. Expand, in powers of $x-2$, the polynomial $x^4-5x^3+5x^2+x+2$. (أنشر كثير الحدود بدلالة قوى $x-2$)
2. Expand, in powers of $x+1$, the polynomial $x^5+2x^4-x^2+x+1$. (أنشر كثير الحدود بدلالة قوى $x+1$)

Exercise 03:

Give Taylor's formula for the function $f(x)=\sqrt{x}$ when $a=1$, $n=3$.

أعطي صيغة تايلر للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ عند $a=1$ و $n=3$.

Exercise 04:

1. Give the Maclaurin formula for the function $f(x)=\sqrt{1+x}$ when $n=2$.

1. أعطي صيغة ماكلورين من أجل الدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$ عندما $n=2$.

2. Give the error of the approximation $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ when $x=0.2$.

2. أعطي قيمة الخطأ للتقريب $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ عندما $x=0.2$.

Exercise 05:

1. Show that:بين أن

$$\sin x = \sin a + (\cos a)(x-a) - \frac{(\sin a)(x-a)^2}{2!} - \frac{(\cos \xi)(x-a)^3}{3!}$$

where $a < \xi < x$.

2. Using the expression from the first question, evaluate $\sin 49°$ and give the error of the approximation.

باستعمال العبارة في السؤال الأول، قدر قيمة $\sin 49°$ والخطأ في التقريب.

Exercise 06:

Write the Maclaurin series expansion of $e^x \sin x$. (أعطي نشر ماكلورين للدالة)

Exercise 07:

1. (a) Using the Maclaurin formula of order n, show that for all $x \geq 0$:

باستعمال صيغة ماكلورين ذات الرتبة n ، بين أنه من أجل كل $x \geq 0$:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

(b) Using the Maclaurin formula of order 2, show that: (باستعمال صيغة ماكلورين ذات الرتبة 2 ، بين أن)

$$\frac{8}{3} < e < 3$$

(c) Conclude that: (استنتج أن:)

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

2. Using the Taylor formula, show that: (باستعمال صيغة تايلر، بين أن:)

(a) For all $x \in [0, \frac{\pi}{2}] : \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

(b) $\forall x > 0 : x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exercise 08:

In Einstein's special relativity, the mass of an object moving at velocity v is given by

في نظرية النسبية الخاصة لأينشتاين، تُعطى كتلة جسم متحرك بسرعة v بـ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

where m_0 is the rest mass and c is the speed of light. The kinetic energy is defined as the difference between total energy and rest energy:

حيث إن m_0 تمثل الكتلة الساكنة للجسم و c هي سرعة الضوء. يتم تعريف الطاقة الحركية على أنها الفرق بين الطاقة الكلية وطاقة السكون:

$$K = mc^2 - m_0c^2.$$

1. Show that for small v (compared to c), the expression for K reduces to the classical Newtonian form:

أثبت أنه عندما تكون v صغيرة مقارنة بـ c ، فإن K تأخذ الشكل الكلاسيكي التالي:

$$K \approx \frac{1}{2}m_0v^2.$$

2. Use Taylor's formula to estimate the difference between relativistic and classical kinetic energy when $|v| \leq 100$ m/s.

استخدم صيغة تايلور لتقدير الفرق بين الطاقة الحركية النسبية والكلاسيكية عندما $|v| \leq 100$ متر في الثانية.