الفصل السادس: الحركة النسبية

مقدمة

الحركة والسكون مفهومان نسبيان. يختلف الموضع والمسار والسرعة والتسارع لنفس المتحرك بحسب المعلم المختار من قبل المراقب. بصفة عامة يتعلق وصف حركة نقطة مادية بالجملة المرجعية المعتمدة لدراسة هذه الحركة.

مثال.1: حركة قذيفة ترمي من طائرة تحلق أفقيا بسرعة ثابته، فان المسار الذي تتبعه القذيفة بالنسبة لمراقب مرتبط بالطائرة هو المستقيم الشاقولي. بينما بالنسبة لمراقب ثابت مرتبط بالأرض ترسم هذه القذيفة قطعا مكافئا.

مثال.2: حركة شخص داخل حافلة، فهذا الشخص في الحقيقة يقوم بحركتين، أولهما حركة هذا الشخص داخل الحافلة والثانية حركته بالنسبة لمراقب موجود بالمحطة.
تركيب حركة نقطة مادية يعني أن هذه النقطة المادية تقوم بحركتين أو أكثر في آن واحد.

في هذا الفصل سنتطرق الى كيفية وصف الحركة عندما ننتقل من جملة مرجعية ما إلى أخرى، ونشتق فيه علاقاتي تركيب السرعات والتسارعات، لكن قبل ذلك نعطي بعض المفاهيم الأساسية.

1. تعاريف أساسية:

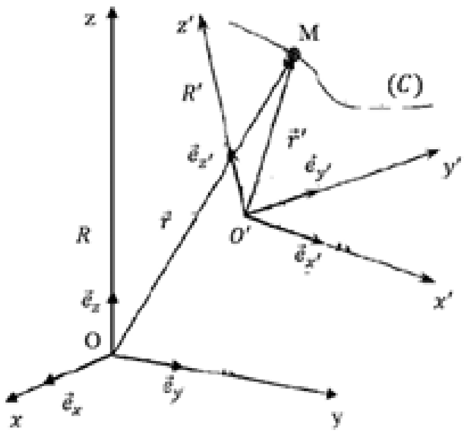
لتكن M نقطة مادية تتحرك في الفضاء، وليكن المرجعين R وR'، المرجع R ثابت والمرجع R' يكون متحركا بالنسبة للمرجع R، وهذا المرجع الاخير ندعوه المرجع الأساسي.
يعرف كل مرجع بأشعة وحدته ومبدؤه كالتالي: $R(O,x,y,z), R'(O',x',y',z')$.

تدعى حركة النقطة المادية بالنسبة للجملة المتحركة R' **بالحركة النسبية**، مثل هذه الحركة يراها مراقب مرتبط بجملة الإحداثيات هذه ويتحرك معها، مسار النقطة M بالنسبة للمرجع المتحرك R' يسمى بالمسار النسبي وسرعتها بالسرعة النسبية ورمزها $\vec{V}(M/R')$ أو $\vec{V}_r$ وتسارعها بالتسارع النسبي ويرمز له بالرمز $\vec{a}(M/R')$ أو $\vec{a}_r$.

حركة النقطة M بالنسبة للمرجع R الثابت تسمى **بالحركة المطلقة** وسرعتها بالسرعة المطلقة ونرمز لها بالرمز $\vec{V}(M/R)$ أو $\vec{V}_a$ وتسارعها بالتسارع المطلق ويرمز له بالرمز $\vec{a}(M/R)$ أو $\vec{a}_a$.

الفصل السادس: الحركة النسبية

الحركة التي تقوم بها الجملة المتحركة بالنسبة للجملة الثابتة تدعى بالحركة الجرية وسرعتها السرعة الجرية $\vec{V}_e$ وتسارعها بالتسارع الجري $\vec{a}_e$. قد تكون حركة R' بالنسبة لـ R انسحابية أو دورانية أو انسحابية ودورانية معا.



الشكل (1.6): المعلم النسبي والمعلم المطلق

كل ملاحظ يدون ملاحظاته كالتالي:

الملاحظ	في المعلم R $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ ثابته في R	في المعلم R' $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ثابته في R ومتغيرة في R'
الموضع	$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$	$\vec{r}' = \overrightarrow{OM'}$
السرعة	$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{V}_r = \frac{d\vec{r}'}{dt}$
التسارع	$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}$	$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt}$

2. العلاقة بين الموضعين:

لدينا شعاع الموضع للنقطة M في المعلم المطلق (الثابت) يكتب كالتالي:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (1.6)$$

ولدينا شعاع الموضع للنقطة M في المعلم النسبي (المتحرك) يكتب كالتالي:

$$(2.6) \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

العلاقة بين الموضعين هي كالتالي:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

يمكن أن نعبر عن هذه العلاقة باستعمال الاحداثيات ونكتب:

$$(3.6) \quad x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x_{O'}\vec{e}_x + y_{O'}\vec{e}_y + z_{O'}\vec{e}_z + x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

حيث: $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ احداثيات النقطة O' (مبدأ المعلم المتحرك) في المعلم المطلق R.

3. العلاقة بين السرعتين النسبية والمطلقة:

باشتقاق العلاقة التي تربط بين الموضعين بالنسبة للزمن في المرجع الثابت R ونكتب:

$$(4.6) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

باستعمال الاحداثيات كما في العلاقة (3.3) فنجد:

$$(5.6) \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- السرعة المطلقة، أي سرعة M بالنسبة للمعلم الثابت R تكتب بالشكل التالي:

$$(6.6) \quad \vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

- السرعة النسبية، أي سرعة M بالنسبة للمعلم المتحرك R' تكتب بالشكل التالي:

$$(7.6) \quad \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- سرعة الجر، أي سرعة المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R تكتب بالشكل التالي:

$$(8.6) \quad \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}$$

ومنه العلاقة التي تربط السرعات الثلاثة والتي تسمى قانون تركيب السرعات:

$$(9.6) \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

نظرية تركيب السرعات: تنص على أن السرعة المطلقة لنقطة مادية تساوي المجموع الهندسي لسرعة الجر والسرعة النسبية.

4. العلاقة بين التسارعات:

نشتق عبارة السرعة المطلقة بالنسبة للزمن فنحصل على عبارة التسارع المطلق:

- التسارع المطلق، أي تسارع M بالنسبة للمعلم الثابت R يكتب بالشكل التالي:

$$(10.6) \qquad \vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

أما باستعمال العلاقة (5.3) فنجد:

$$\begin{aligned}(11.6) \quad \vec{a}_a &= \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ &= \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{e}_{x'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e}_{y'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e}_{z'}}{dt^2}\right] \\ &+ \left[\ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}\right] \\ &+ 2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right]\end{aligned}$$

العبارتان متكافئتان أي العلاقتين (10.6) والعلاقة (11.6) ونلاحظ أن التسارع المطلق عبارة عن مجموع ثلاث حدود تمثل تسارعات وهي:

- التسارع المطلق، أي تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم الثابت R العلاقة (10.6) التالية:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- التسارع النسبي، أي تسارع النقطة M بالنسبة للمعلم المتحرك R' يكتب بالشكل التالي:

$$(12.6) \qquad \vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- تسارع الجر، أي تسارع المعلم المتحرك R' بالنسبة للمعلم الثابت R يكتب بالشكل التالي:

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{e}_{x'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{e}_{y'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{e}_{z'}}{dt^2} \qquad (13.6)$$

- تسارع كوريوليس، نسبة الى من وضعه (كوريوليس) سنة 1882. يرمز له بالرمز $\vec{a}_c$ وتعطى عبارته كالتالي:

$$\vec{a}_c = 2\left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right] \qquad (14.6)$$

وعليه نكتب:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \qquad (15.6)$$

ومنه فشعاع التسارع المطلق يساوي مجموع شعاع التسارع النسبي وشعاع تسارع الجر وشعاع تسارع كوريوليس.

5. حالات خاصة:

1.5. حركة R' انسحابيه بالنسبة لـ R:

اذا كان R' في حركة انسحابيه (سواء منتظمة أم لا) بالنسبة للمعلم R فان اشعة الوحدة وفق محاور المعلم المتحرك $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ ثابته الاتجاه والحامل الشكل (2.6) وبالتالي فان مشتقاتها بالنسبة للزمن معدومة، ومنه فان سرعة الجر $\vec{V}_e$ مستقلة عن النقطة M ويكون لدينا:

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

والسرعة المطلقة تصبح كالتالي:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{V}(O'/R) \qquad (16.6)$$

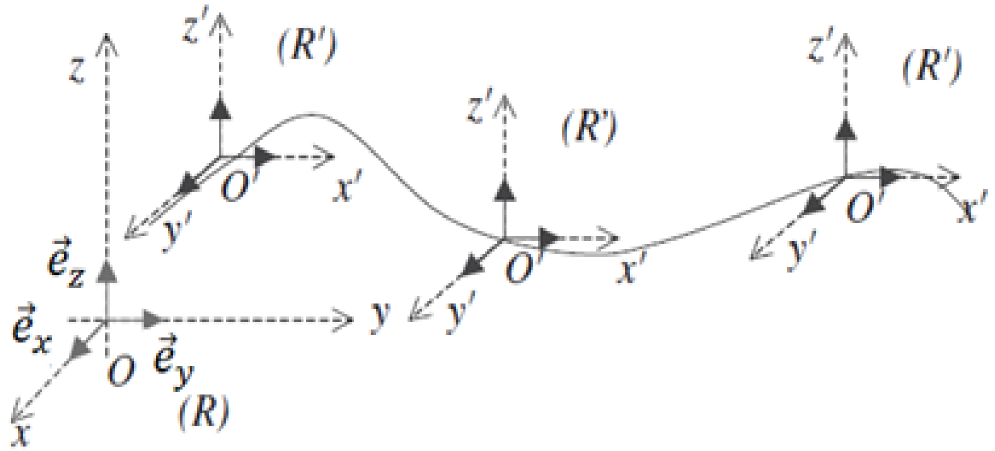
أما بالنسبة للتسارع فان تسارع كوريوليس يكون معدوما.

$$\vec{a}_c = \vec{0} \Longrightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \qquad (17.6)$$

مع: $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$

وبالتالي تصبح عبارة التسارع المطلق كالتالي:

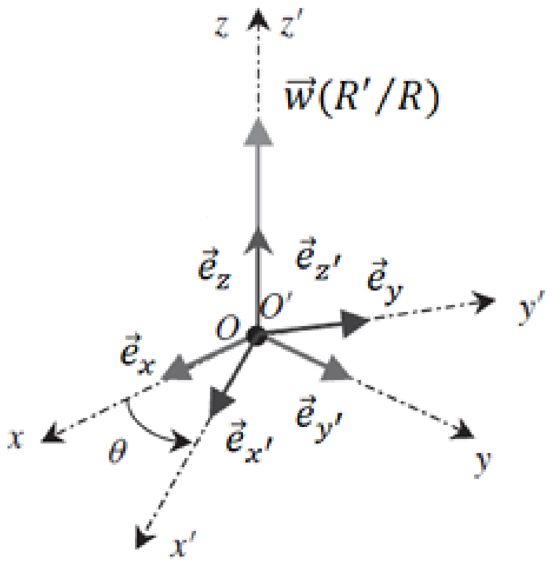
$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e = \vec{a}_r + \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \qquad (18.6)$$



الشكل (2.6): المعلم النسبي R' في حركة انسحابية كيفية بالنسبة للمعلم المطلق R

2.5. حركة R' دورانية بالنسبة لـ R:

ندرس هنا الحالة التي تقوم فيها الجملة R' بحركة دورانية بالنسبة للجملة R ، بحيث يضل مستوياهما Oxy و $O'x'y'$ منطبقين ولهما نفس المبدأ وبالتالي يكون شعاعي موضعهما منطبقين ($\vec{r}' = \vec{r}$)، وتقوم الجملة R بالدوران حول المحور المشترك Oz بسرعة زاوية w(t) ، مثلما هو موضح في الشكل (2.6).



الشكل (2.6): جملة مرجعية R' تتحرك بحركة دورانية بالنسبة للجملة R وذلك حول محور مشترك Oz

- العلاقة بين السرعات:

نلاحظ من الشكل (3.3) أن:

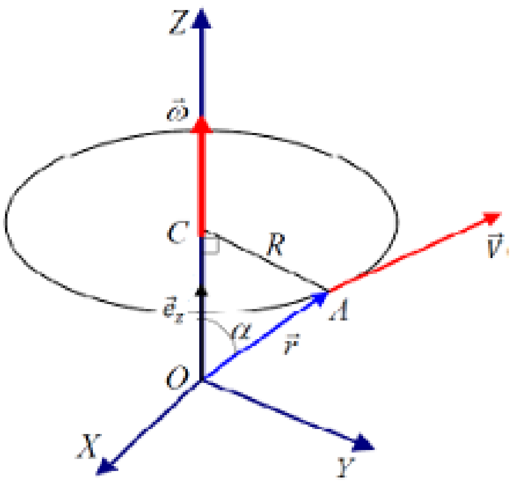
$R = r\sin\alpha$ ونعرف أن $V = wR$ ومنه فان :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{r} \iff V = wr\sin\alpha \qquad (19.6)$$

لذا يمكن ان نكتب:

$$\vec{w} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$$

وهذا يعني انه بإمكاننا وضع السرعة الزاوية على شكل مقدار شعاعي، بحيث تكون جهته عمودية على مستوي الحركة في اتجاه يحدد باستعمال قاعدة اليد اليمنى التي تستعمل لتحديد اتجاه الشعاع الناتج عن الجداء الشعاعي.



الشكل (3.6): شعاع السرعة الزاوية

المعلم R' في حركة دورانية بالنسبة للجملة الثابتة R وذلك حول المحور Oz، وبالتالي فان شعاع السرعة الزاوية يكون محمولا على المحور Oz، ونكتب:

$$\vec{w} = w\vec{e}_z$$

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم Oxyz فان سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع كالتالي:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \Rightarrow \vec{V}_a = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \qquad (20.6)$$

بالنسبة للملاحظ O' المرتبط بالمعلم $O'x'y'z'$ فان سرعة النقطة المادية M تشتق من عبارة شعاع الموضع كالتالي:

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \Rightarrow \vec{V}_r = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} \qquad (21.6)$$

بالنسبة للملاحظ O المرتبط بالمعلم Oxyz فان المعلم $O'x'y'z'$ يدور وبالتالي فان أشعة الوحدة $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ متغيرة الجهة والحامل بالنسبة له وعليه فانه يمكن أن يكتب بالنسبة لـ R التالي:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} + \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'} \qquad (22.6)$$

نهايات الأشعة $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ تقوم بحركة دائرية منتظمة بالنسبة للملاحظ O بسرعة زاوية (w)، ولدينا أيضا $(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt})$ الذي يمثل سرعة نقطة تقع على بعد يساوي الواحد وتنتقل بحركة دائرية منتظمة بنفس السرعة الزاوية المذكورة انفا، وبناء على العلاقة (19.6) فانه يمكن أن نكتب التالي:

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{x'}, \qquad \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{y'}, \qquad \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \vec{w} \wedge \vec{e}_{z'}$$

ملاحظة: ان الحد المتمم في العلاقة (22.6) $\vec{w} \wedge \vec{e}_{x'}$ ناتج عن تغير اتجاهات أشعة الوحدة في R' ، بسبب دوران R' *بالنسبة لـ* R.

ومنه يمكن ان نكتب:

$$x'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = x'\vec{w} \wedge \vec{e}_{x'} + y'\vec{w} \wedge \vec{e}_{y'} + z'\vec{w} \wedge \vec{e}_{z'}$$
$$= \vec{w} \wedge \left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}\right) = \vec{w} \wedge \vec{r}$$

هذا المقدار يمثل سرعة الجر في هذه الحالة، بالتعويض في العلاقة (22.6) نحصل على:

$$(23.6) \qquad \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}$$

هذه العبارة تعطي العلاقة بين السرعات في الحالة التي يقوم فيها المعلم R' بحركة دورانية بالنسبة للجملة R.

- العلاقة بين التسارعات:

- تسارع النقطة M كما يراه الملاحظ O (10.6):

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

- تسارع النقطة M كما يراه الملاحظ O' (دون الاخذ بعين الاعتبار الدوران) (12.6):

$$\vec{a}_r = \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}$$

- ولدينا باشتقاق العبارة (23.6):

$$(24.6) \qquad \vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{r}$$

الحد الأخير معدوم لان السرعة الزاوية ثابته وبالتالي العلاقة (24.6) تكتب بالشكل:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$(25.6)\quad \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \left[\ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}\right] + \left[\dot{x}'\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right]$$

الحد الأول في العلاقة (25.6) يمثل التسارع النسبي، بينما الحد الثاني فيمثل $(\vec{w} \wedge \vec{V}_r)$ ونكتب:

$$(26.6)\qquad \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r$$

ولدينا العلاقة (23.6):

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}$$

ومنه:

$$\vec{w} \wedge \vec{V}_a = \vec{w} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{w} \wedge \left(\vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{r}\right) = \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$

وبالتالي نكتب:

$$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \vec{w} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) \\ &= \vec{a}_r + 2\vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})\end{aligned}$$

وأخيرا نكتب:

$$(27.6)\qquad \vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{w} \wedge \vec{V}_r + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$$

وهي العلاقة التي تربط مختلف التسارعات في حركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية ثابته w.

الحد: $2\vec{w} \wedge \vec{V}_r$ يمثل تسارع كوريوليس

الحد: $\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$ يمثل تسارع مركزي.

الحدين الأخيرين ناتجين عن الحركة النسبية لدوران الملاحظين.