تمهيد:

ظهرت تقنيات التمهيد الأسي لأول مرة على يد الباحث **هولت (Holt)** عام 1957، ثم طورها **براون (Brown)**عام 1962. وتتمحور هذه التقنيات حول مبدأ أساسي هو **منح أوزان أكبر للقيم الحديثة** في السلسلة الزمنية مقارنة بالقيم الأقدم، مما يجعل التوقعات أكثر استجابة للتغيرات الحديثة.

في هذه المحاضرة سوف يتم تناول:

- **التمهيد الأسي البسيط (LES)؛**
- **التمهيد الأسي المضاعف (LED)،**
- **تمهيد هولت – وينتر.**

1. المبادئ الأساسية للتمهيد الأسي

أ. **المبدأ الأول: تناقص أهمية البيانات مع قدمها الزمني:** تقوم طريقة التنعيم الأسي على فرضية أساسية مفادها أن المعلومات الأحدث في السلسلة الزمنية تكون أكثر أهمية من المعلومات القديمة. لذلك، عند إجراء التنبؤات، يتم منح أوزان أكبر للبيانات الحديثة مقارنة بالبيانات التاريخية البعيدة، حيث تتناقص هذه الأوزان بشكل تدريجي كلما ابتعدنا زمنياً عن الحاضر. الفكرة الأساسية لهذا المبدأ أن **الأحداث أو المعلومات الأخيرة تكون أكثر تأثيراً على المستقبل"**

ب. **المبدأ الثاني: تلخيص المعلومات في معايير محددة:** تحتوي السلاسل الزمنية على كميات هائلة من البيانات التي يصعب معالجتها بشكل كامل. لذلك تعتمد تقنية التنعيم الأسي على تجميع هذه المعلومات واختصارها في مجموعة صغيرة من المؤشرات أو المعالم الإحصائية الأساسية؛ أي أن هذا المبدأ قائم على أساس التبسيط والاختصار (اختصار كل المعلومات في وجود الاتجاه أو الموسمية. وبذلك تصبح عملية التنبؤ ممكنة من خلال الاعتماد على هذه القيم الموجزة دون الحاجة لمعالجة جميع البيانات التاريخية.

ت. **المبدأ الثالث: التحديث المستمر للمؤشرات:** تتميز طريقة التنعيم الأسي بقدرتها على تحديث المعايير والمؤشرات بشكل فوري ومستمر كلما توفرت بيانات جديدة. يتم هذا التحديث بنفس التردد الزمني (الدورية) الذي تظهر فيه البيانات الجديدة، مما يجعل النموذج قادراً على التكيف مع التغيرات المستجدة. ويُعد هذا المبدأ امتداداً طبيعياً وحتمياً للمبدأين السابقين.

مثال تطبيقي مبسط: لنفترض أنك تتابع مبيعات متجر إلكتروني:

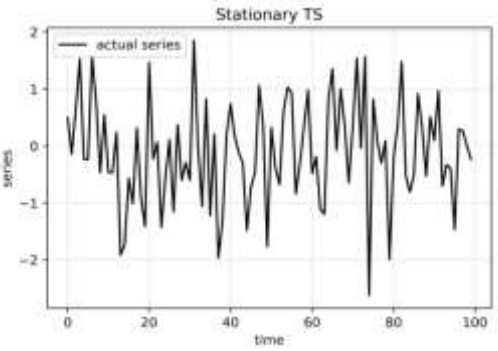
1. **الأسبوع الأول** :مبيعات 100 وحدة؛
2. **الأسبوع الثاني** :مبيعات 120 وحدة؛
3. **الأسبوع الثالث** :مبيعات 115 وحدة

بتطبيق المبادئ الثلاثة:

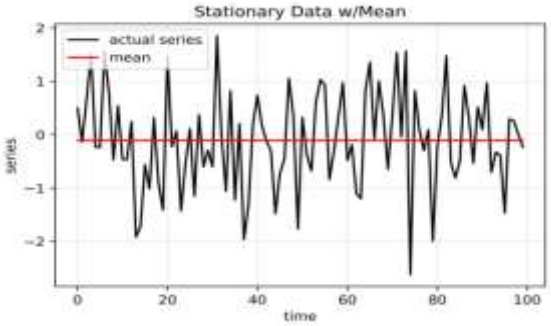
4. **المبدأ الأول** :إعطاء وزن أكبر للأسبوع الثالث (الأحدث)؛
5. **المبدأ الثاني** :تلخيص البيانات في متوسط مرجح = 112 وحدة؛

6. **المبدأ الثالث** :عند ظهور بيانات الأسبوع الرابع (130 وحدة)،حيث يتم:
   - تحديث المتوسط المرجح فوراً
   - إعادة حساب الأوزان تلقائياً
   - إنتاج تنبؤ جديد للأسبوع الخامس

2. **تعريف التمهيد**[1]:**ال**تمهيد هو عملية تتيح لك استخراج الأنماط المفيدة من البيانات. **فهو يعد** أداة مهمة تتيح لنا إجراء توقعات مستقبلية.



مثال: تأمل البيانات المستقرة الموجودة على اليمين ▪ .كيف ستقوم بالتنبؤ بما سيحدث بعد خطوة واحدة، أو خطوتين، أو أكثر في المستقبل.



الحل الواضح هو حساب متوسط السلسلة وتوقع تلك القيمة في المستقبل، يبدو ذلك معقولًا جدًا في هذه الحالة. ومع ذلك، ينبغي أن نكون أكثر دقة ونحسب مدى انحراف تقديرنا عن الواقع .

والآن، سنتعرف عن متوسط مربع الخطأMSE)

3. **متوسط مربع الخطأ (MSE) :** يُعد متوسط مربع الخطأ مقياسًا يُستخدم بشكل شائع لقياس فعالية التقدير بطريقة كمية.

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(observed_i - estimate_i)^2$$

مثال:

X	X^	$(X-X^{\wedge})^2$
1.5	1.3	0.04
2	2.2	0.04
2.5	2.5	0
3	3.1	0.01
3.5	3.9	0.16
4	4.6	0.36
$\sum$		**0.61**

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{0.61}{6} = 0.102$$

والسؤال، كيف يساعد MSE في اختيار النموذج المناسب؟

[1] Smoothing is a process that allows you to extract useful patterns from data . following

عند مقارنة عدة نماذج (مثل نماذج التنعيم المختلفة أو نماذج الانحدار)، يمكن استخدام MSE كمعيار لتحديد النموذج الأفضل:

كلما كان MSE أقل، كان النموذج أكثر دقة في التنبؤ بالقيم.

النموذج ذو MSE الأعلى يعني أن توقعاته تنحرف أكثر عن القيم الحقيقية

مثال 2: نفترض أن لدينا بيانات حقيقية لدرجات الحرارة خلال خمسة أيام، قمنا بعملية تنبؤ فكان لنا نموذجان كما هو **في الجدول**: أي النموذجين يعطي توقعات أقرب للقيم الحقيقية.

الأيام	Y	النموذج A	النموذج B	(Y-A)^2	(Y-B)^2
1	20	21	19	1	1
2	22	20	23	4	1
3	21	22	20	1	1
4	19	18	21	1	4
5	20	20	22	0	4
∑				7	11

$$MSE_A = \frac{1}{n}\sum_i^n (Y_i - A_i)^2 = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$MSE_B = \frac{1}{n}\sum_i^n (Y_i - B_i)^2 = \frac{11}{5} = 2.2$$

النتيجة: نلاحظ أن النموذج A لديه MSE=1.4 وهو أقل مقارنة بالنموذج B=2.2، إذن النموذج A هو الأفضل في هذا المثال لأنه يعطي توقعات أقرب إلى القيم الحقيقية.

ولكن كيف يتم تحديد ثابت التمهيد: **تحديد ثابت التمهيد** يتم عموما تحديد معامل التمهيد الذي يعطي أدنى قيمة لمجموع مربعات أخطاء التنبؤ كما يلي: $Min\sum_{t=1}^{n}(x_t - \hat{x}_t)^2 = Min\sum_{t=1}^{n} e_t^2$

4. التمهيد الأسي البسيط: النموذج المستقر:

التمهيد الأسي البسيط يستخدم معاملا واحد ألفا α لإعطاء أوزانا متناقصة للمشاهدات كلما كان الزمن متأخرا (قديما)؛ بمعنى إعطاء أوزان مختلفة للقيم السابقة Xt، هذه الأوزان تنخفض بشكل أسي كلما رجعنا بالزمن إلى الوراء.

يحدد ثابت التمهيد وهو رقم ينحصر بين الصفر والواحد ؛ أي: $\alpha \in [0,1]$

تكتب صيغة التمهيد أو الصقل البسيط على النحو التالي:	$\hat{x}_t = \alpha x_t + (1-\alpha)\hat{x}_{t-1}$

أما فيما يخص القيم التنبؤية فيتم حسابها كما يلي: $\hat{x}_{t+h} = \hat{x}_h \ldots\ldots \forall h$ ، حيث h بمثل أفق التنبؤ (فترة زمنية مستقبلية).

مثال: قم بتمهيد السلسلة Xt باستخدام معامل التمهيد $\alpha = 0.3$

t	X	X^
1	30	30
2	40	33.00
3	40	35.10
4	30	33.57
5	20	29.50
6	20	26.65
7	30	27.65
8	30	28.36
9		**28.36**
10		**28.36**

نقوم بالتهيئة أو ضبط القيمة الأولية حيث: $\hat{x}_1 = x_1 = 30$

$$\hat{x}_2 = 0.3 \times 40 + 0.7 \times 30 = 33$$

$$\hat{x}_3 = 0.3 \times 40 + 0.7 \times 33 = 35.1$$

وهكذا ..... حتى:

$$\hat{x}_9 = \hat{x}_{10} = 28.36$$

ملاحظة هامة: يستخدم هذا الصقل في النماذج المستقرة والتي لا تتأثر بحركة الاتجاه العام، على هذا الساس تصبح هذه الطريقة غير فعالة وفاشلة في حالة التنبؤ بسلاسل تتأثر بحركة اتجاه عام صعودا أو نزولا. فالتمهيد البسيط غير فعال في السلاسل ذات مركبة الاتجاه العام وبدلا من ذلك نستعمل طريقة التمهيد الأسي المضاعف.

5. التمهيد الأسي المضاعف (النموذج الخطي):

في حالة السلاسل الزمنية ذات الاتجاه العام نستعمل طريقة التمهيد الاسي المضاعف (Le lissage exponentiel double: LED)

يطبق نموذج (LED) على السلاسل الزمنية والتي تكون على الشكل التالي: $x_t = a + bt$ حيث المعلمتان b, a تتحركان مع الزمن (ليس بها موسمية)، وكما هو واضح من الاسم فإن هذه الطريقة تعتمد بالأساس على تمهيد للسلسلة التي سبق تمهيدها مسبقا.إذن خطوات التمهيد المضاعف:

- إجراء تمهيد بسيط (LES)؛ أي حساب S_t؛
- إعادة تمهيد السلسلة المهدة S_t بنفس معامل التمهيد؛ أي حساب SS_t؛
- حساب المعاملين a_t b_t؛
- استخدام المعاملين a_t وb_t لحساب القيمة المتوقعة(التنبؤ للمجال الزمني h) كما يلي: $\hat{x}_{t+h} = a_t + b_t \times h$

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha) S_{t-1}$$

$$SS_t = \alpha S_t + (1-\alpha) SS_{t-1}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\sigma}(S_t - SS_t)$$

$$a = 2S_t - SS_t$$

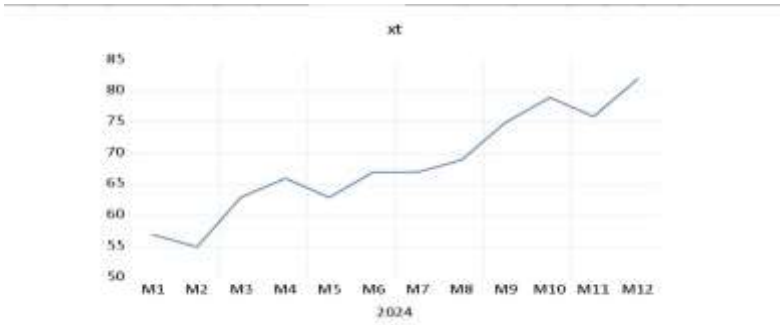
مثال: يمثل الجدول التالي سلسلة زمنية لعدد الوحدات التالفة في ورشة ما شهريا لسنة 2024.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_t	57	55	63	66	63	67	67	69	75	79	76	82

المطلوب:

- مثل السلسلة الزمنية بيانيا؛
- تحقق من صلاحية البيانات للتنبؤ بطريقة LED؛
- تنبؤ بعدد المنتجات التالفة للأشهر الأربع المقبلة (α=0.5) لسنة 2025، ثم مثل السلسلة القديم والممهدة في نفس المعلم.

التمثيل البياني:



نلاحظ أن السلسلة بها توجه عام واضح يتزايد مع تزايد الزمن، وعلى هذا الأساس يمكن تطبيق التمهيد الأسي المضاعف LED من خلال الشكل التالي:

$$x_t = a + bt$$

عملية التمهيد والتنبؤ: معامل التمهيد α

- أولا، نقوم بتمهيد السلسلة Xt تمهيد أسي بسيط(St) بالمعامل α=0.5 :

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha) S_{t-1}$$

- ثانيا، نمهد السلسلة الممهدة سابقا بنفس معامل التمهيد α=0.5 (SSt)؛

$$SS_t = \alpha S_t + (1-\alpha) SS_{t-1}$$

- ثالثا، نقوم بحساب المعاملين a وb كما يلي:

$$b_t = \frac{\alpha}{1-\sigma}(S_t - SS_t)$$

$$a = 2S_t - SS_t$$

- **وأخيرا عملية التنبؤ كما يلي:** $\hat{x}_{t+h} = a_t + b_t \times h$

هنا أفق التنبؤ (h=1).

	x_t	S_t	SS_t	b_t	a_t	$X_{(h)}$
1	57	57	57	0.00	57.00	
2	55	56.00	56.50	-0.50	55.50	57.00
3	63	59.50	58.00	1.50	61.00	55.00
4	66	62.75	60.38	2.38	65.13	62.50
5	63	62.88	61.63	1.25	64.13	67.50
6	67	64.94	63.28	1.66	66.59	65.38
7	67	65.97	64.63	1.34	67.31	68.25
8	69	67.48	66.05	1.43	68.91	68.66
9	75	71.24	68.65	2.59	73.84	70.34
10	79	75.12	71.88	3.24	78.36	76.43
11	76	75.56	73.72	1.84	77.40	81.59
12	82	78.78	76.25	**2.53**	81.31	79.24
13						83.84
14						86.37
15						88.90
16						91.42

نلاحظ مثلا أن تنبؤ شهر فيفري يحسب على أساس قيم شهر جانفي. على هذا الأساس تكون استجابة التنبؤ للتغيرات في

مسار السلسلة مع بعض التأخير، حيث يكون هناك مطاردة أو سباق التتابع (course poursuite) بين القيم المحققة فعليا والقيم المتنبأ بها.

- عملية التنبؤ لسنة 2025

$$\hat{x}_{t+h} = a_t + b_t \times h$$

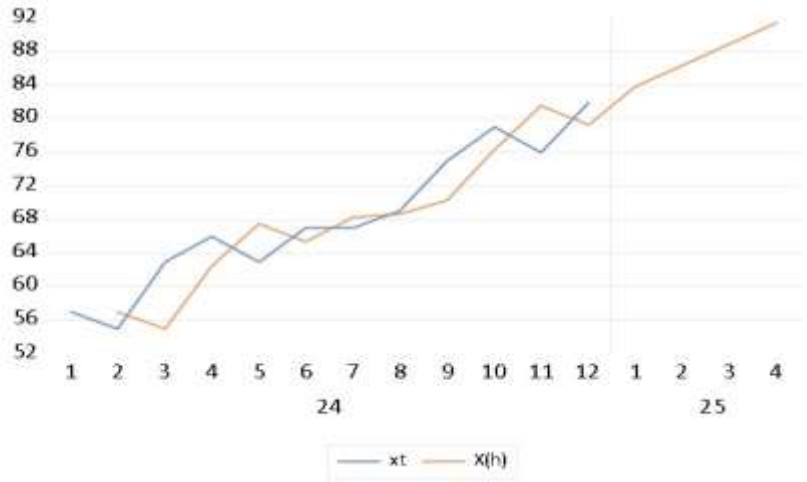
$$\hat{x}_{jan,2025} = 81.31 + 2.53 = 83.84$$

$$\hat{x}_{fev,2025} = 81.31 + 2.53 \times (2) = 86.37$$

$$\hat{x}_{mar,2025} = 81.31 + 2.53 \times (3) = 88.9$$

$$\hat{x}_{avr,2025} = 81.31 + 2.53 \times (4) = 91.42$$

التمثيل البياني لسلسلة الزمنية والسلسلة الممهدة وعملية التنبؤ:



6. نموذج هولت ونتر (Holt–Winters):

تمتاز طريقة التمهيد لنموذج (Holt–Winters) بإمكانية إدخال مركبة الموسمية في نموذج التنبؤ، هذه الطريقة يتم إجراء ثلاث عمليات للتمهيد على النحو التالي:

- تمهيد المتوسط أو المستوى بمعامل التمهيد α حيث $\alpha \in [0,1]$ ؛
- تمهيد الاتجاه بمعامل التمهيد β حيث $\beta \in [0,1]$ ؛
- تمهيد مركبة الموسمية بمعامل التمهيد γ حيث $\gamma \in [0,1]$ ؛

العرض الرياضي للنموذج الجدائي:

يتم تمهيد المتوسط بالعلاقة التالية: $$a_t = \alpha(x_t / S_{t-p}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

يتم تمهيد الاتجاه بالعلاقة التالية: $$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

يتم تمهيد الموسمية بالعلاقة التالية: $$S_t = \gamma(x_t / a_t) + (1-\gamma)S_{t-p}$$

ومن تم فإن التنبؤ للمجال الزمني (h) يعطى بالعلاقة التالية: $\hat{x}_{t+h} = (a_t + hb_t) \times S_{t+h-p}$

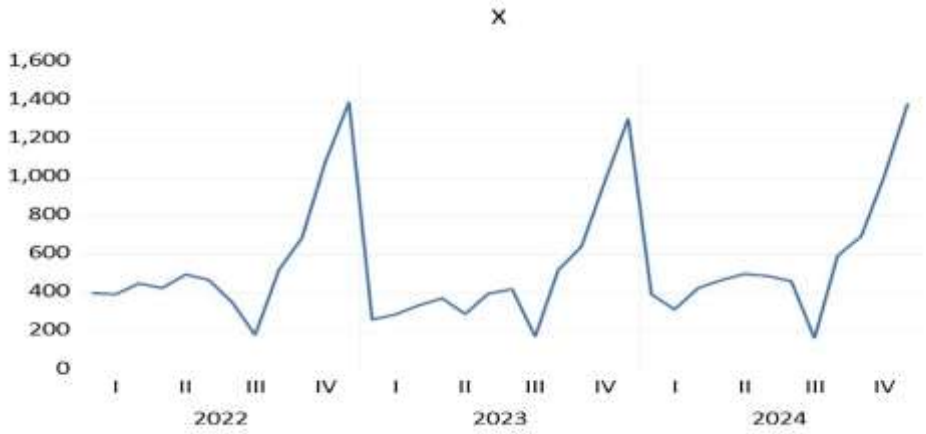
مثال:

t	*M1*	*M2*	*M3*	*M4*	*M5*	*M6*	*M7*	*M8*	*M9*	*M10*	*M11*	*M12*
2022	401.60	395.70	451.00	427.60	496.80	467.70	352.30	182.10	522.20	687.20	1080.30	1391.60
2023	263.90	289.90	337.00	374.00	292.70	398.60	421.70	173.80	522.10	642.40	984.20	1307.60
2024	393.40	316.20	428.60	467.60	501.00	487.40	463.30	165.90	595.10	698.10	1012.00	1380.00

المطلوب:

- مثل السلسلة الزمنية بيانيا، ثم تحقق من صلاحية البيانات للتنبؤ بطريقة H-W؛
- تنبؤ بعدد المنتجات التالفة لجميع أشهر سنة 2025، علما أن $\alpha = 0.3; \beta = 0.1; \gamma = 0.2$

التمثيل البياني:



نلاحظ وجود مركبة الموسمية مع اتجاه وبالتالي نستطيع تطبيق نموذج التمهيد H-W.

- عملية التمهيد: $\alpha = 0.3; \beta = 0.1; \gamma = 0.2$

الحسابات:

- أولا، نحدد فجوة الموسمية (p=12)
- ثانيا، نقوم بحسابات السنة الأولى؛ سنة 2022 كما يلي:

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i}{p}$	$a_p = \bar{X}$	$b_p = 0$	$S_t = x_t / \bar{X}$

- ثالثا، عملية التمهيد باستعمال المعاملات:

$$a_{p+1(t=13)} = 0.3(x_{13} / S_{13-12}) + (1-0.3)(a_{13-1} + b_{13-1})$$
$$a_{t=13} = 0.3(263.9 / 0.7) + (1-0.3)(571.34 + 0) = 512.57$$

$$b_{13} = \beta(a_{13} - a_{13-1}) + (1-\beta)b_{13-1}$$
$$b_{13} = 0.1(512.57 - 571.34) + (1-0.1)0 = -5.88$$

$$S_{13} = 0.2(x_{13} / a_{13}) + (1-0.2)S_{13-12}$$
$$S_{13} = 0.2(263.9 / 512.57) + (1-0.2)0.7 = 0.67$$

.....

t			x_t	a_t	b_t	s_t	X^F
1	*2022*	*M1*	401.60			0.70	
2		*M2*	395.70			0.69	
3		*M3*	451.00			0.79	
4		*M4*	427.60			0.75	
5		*M5*	496.80			0.87	
6		*M6*	467.70			0.82	
7		*M7*	352.30			0.62	
8		*M8*	182.10			0.32	
9		*M9*	522.20			0.91	
10		*M10*	687.20			1.20	
11		*M11*	1080.30			1.89	
12		***M12***	**1391.60**	**571.34**	**0**	**2.44**	
13	*2023*	*M1*	263.90	512.57	-5.88	0.67	
14		*M2*	289.90	480.26	-8.52	0.67	350.93
15		*M3*	337.00	458.29	-9.86	0.78	372.38
16		*M4*	374.00	463.82	-8.33	0.76	335.61
17		*M5*	292.70	419.83	-11.89	0.84	396.06
18		*M6*	398.60	431.63	-9.52	0.84	333.94
19		*M7*	421.70	500.65	-1.67	0.66	260.28
20		*M8*	173.80	512.87	-0.28	0.32	159.04
21		*M9*	522.10	530.19	1.48	0.93	468.51
22		*M10*	642.40	532.39	1.55	1.20	639.48
23		*M11*	984.20	529.92	1.15	1.88	1009.59
24		*M12*	1307.60	532.80	1.32	2.44	1293.50
25	*2024*	*M1*	393.40	551.28	3.04	**0.67**	355.35
26		*M2*	316.20	528.60	0.47	0.66	374.05
27		*M3*	428.60	535.50	1.11	0.78	411.91
28		*M4*	467.60	560.20	3.47	0.77	407.82
29		*M5*	501.00	574.56	4.56	0.84	470.70
30		*M6*	487.40	579.54	4.60	0.84	486.21
31		*M7*	463.30	618.93	8.08	0.68	386.56
32		*M8*	165.90	593.11	4.69	0.31	202.37
33		*M9*	595.10	610.81	5.99	0.94	554.84
34		*M10*	698.10	605.77	4.89	1.19	742.35
35		*M11*	1012.00	588.60	2.68	1.85	1150.55
36		*M12*	1380.00	**583.61**	**1.91**	2.42	1442.36
37	*2025*	*M1*		583.61+(1.91*1)*0.67			395.21
38		*M2*		583.61+(1.91*2)*0.66			387.40
39		*M3*					461.42
40		*M4*					458.20
41		*M5*					499.73
42		*M6*					499.80
43		*M7*					405.44
44		*M8*					188.15
45		*M9*					563.21
46		*M10*					719.29

47		M11					1119.34
48		M12		583.61+(1.91*12)*2.42			1470.62

ملاحظة هامة: عند إجراء بعض الحسابات قد تكون مختلفة على ما هي في الجدول وهذا نتيجة عملية التقريب فقط، فالحسابات منجزة بالإكسل وهو يؤخذ جميع الأرقام بعد الفاصلة.

- **عملية التنبؤ (حساب $X^{Forcasting}$ أو $X^{\wedge}_t$)**

  - هنا نؤكد على ظاهرة المطاردة (سباق التتابع) بين القيم الحقيقية والقيم التنبؤية؛ بمعنى القيمة التنبؤية لشهر فيفري من سنة 2023 (t=14) تحتسب بقيم شهر جانفي من نفس السنة (t=13) وهكذا...؛
  - القيم التنبؤية لأشهر سنة 2025؛ هنا يكون أفق التنبؤ (h=1) لشهر جانفي، ثم (h=2) لشهر فيفري كما هو موضح في الجدول أعلاه وذلك من خلال العلاقة التالية: $\hat{x}_{t+h} = (a_t + hb_t) \times S_{t+h-p}$

القيمة التنبؤية لشهر جانفي سنة 2025 **(h=1)**

$$\hat{x}_{t+h} = (a_t + hb_t) \times S_{t+h-p} ....(h=1)$$
$$\hat{x}_{36+1} = (a_{36} + (1)b_{36}) \times S_{36+1-12}$$
$$\hat{x}_{37} = (583.61 + (1)1.91) \times S_{25}$$
$$\hat{x}_{37} = (583.61 + (1)1.91) \times 0.67 = 395.21$$

القيمة التنبؤية لشهر فيفري سنة 2025 **(h=2)**

$$\hat{x}_{t+h} = (a_t + hb_t) \times S_{t+h-p}$$
$$\hat{x}_{36+2} = (a_{36} + (2)b_{36}) \times S_{36+2-12}$$
$$\hat{x}_{38} = (583.61 + (2)1.91) \times S_{26}$$
$$\hat{x}_{38} = (583.61 + (2)1.91) \times 0.66 = 387.4$$

القيمة التنبؤية لشهر ديسمبر سنة 2025 **(h=12)**

$$\hat{x}_{t+h} = (a_t + hb_t) \times S_{t+h-p}$$
$$\hat{x}_{36+12} = (a_{36} + (12)b_{36}) \times S_{36+12-12}$$
$$\hat{x}_{48} = (583.61 + (12)1.91) \times S_{36}$$
$$\hat{x}_{48} = (583.61 + (12)1.91) \times 2.42 = 1470.62$$

- رسم السلسلة الأصلية والسلسلة الممهدة: