

La Méthode Hongroise

Historique et domaine d'application

La méthode hongroise a été développée et publiée en 1955 par **Harold William Kuhn** (né le 29 juillet 1925), un mathématicien et économiste américain, professeur à l'Université de Princeton. Il a publié plusieurs ouvrages dont *Nonlinear Programming* avec Albert Tucker en 1951, puis *Contributions to the Theory of Games* en 1976.

C'est Harold William Kuhn qui a donné le nom de « méthode hongroise » à cet algorithme. Ce nom est un hommage aux travaux antérieurs de deux mathématiciens hongrois : **Dènes König** et **Jenő Egerváry**, sur lesquels l'algorithme s'est largement appuyé.

Problématique

Supposons que, dans une entreprise, n ouvriers puissent travailler indifféremment sur n machines, mais avec plus ou moins d'efficacité.

L'efficacité peut se mesurer par le revenu provenant de la vente des produits fabriqués par les divers ouvriers travaillant sur les différentes machines.

Répartir les ouvriers sur les machines de la façon la plus efficace est un problème d'affectation.

Comment doit-on affecter chaque unité à une seule tâche pour que la rentabilité soit optimale

1 Définition de la méthode hongroise

La méthode hongroise est un algorithme qui permet de minimiser les coûts dans un problème d'optimisation basé sur la programmation linéaire.

L'objectif de la méthode hongroise est de trouver le coût minimum d'un ensemble de tâches qui doivent être effectuées par les personnes les plus appropriées.

2 Définition du problème d'affectation

2.1 Problème d'affectation

Il s'agit d'un problème dans lequel on doit affecter certaines variables à d'autres variables.

Par exemple :

- Affectation des ouvriers à la réalisation des tâches différentes
- Affectation des tâches à des machines
- etc.

2.2 Présentation du problème d'affectation (PA)

Cette méthode s'agit d'une procédure itérative qui transforme le problème d'affectation en une matrice initiale remplie par les coûts, durées, et qui sera transformée en une suite de matrices équivalentes, jusqu'à l'obtention d'une affectation optimale.

L'objectif est donc de trouver un élément par ligne et colonne dans la matrice telle que la somme des coûts, durées soit minimale.

Il existe deux raisonnements, König, König Bis pour appliquer la méthode hongroise.

Conditions :

- Nombre de colonnes (n) = nombre de lignes (m)
- L'affectation d'un salarié i au client j doit entraîner un seul coût C_{ij} (C_{ij} différent de 0)

3 Les étapes de la méthode « Affectation »

Prenons un exemple simple afin de montrer le processus de l'algorithme. Soit 4 salariés (ligne) et 4 clients (colonne). D'où le problème est d'affecter chaque salarié à un client de manière que le coût de déplacement soit le minimum possible.

4 La matrice professionnelle tableau initial

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	10	5	6	10
Salarié 2	6	2	4	6
Salarié 3	7	8	5	6
Salarié 4	9	5	4	10

Coût de déplacement

4.1 Étapes : réduction du tableau initial

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	5	0	1	5
Salarié 2	4	0	2	4
Salarié 3	2	1	0	1
Salarié 4	5	1	0	6

On soustrait à chaque ligne le plus petit élément de la ligne.

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	5	0	1	5
Salarié 2	4	0	2	4
Salarié 3	2	1	0	1
Salarié 4	5	1	0	6

On soustrait à chaque colonne le plus petit élément de la colonne.

Cette normalisation des coûts machines et des tâches permet d'avoir au moins un zéro par ligne et par colonne.

4.2 Étape 2 : recherche une solution réalisable

- On commence par la ligne qui comporte le moins de 0, en cas de plusieurs lignes on prend celle du plus haute.
- On encadre un zéro choisi de cette ligne (cellule plus à gauche).
- On barre tous les zéros qui se trouvent sur la même ligne et la même colonne que celui sélectionné.

On répète ce processus (sans prendre en considération les 0 barrés) jusqu'à ce que tous les 0 soient encadrés ou barrés.

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	5		1	5
Salarié 2	4		2	4
Salarié 3	2	1		1
Salarié 4	5	1		6

4.3 Étape 3 : Marquer et barrer des lignes et des colonnes

- Marquer d'une croix toutes les lignes ne contenant aucun 0 exécuté.
- Marquer d'une croix toutes les colonnes ayant un 0 barré sur une ligne marquée.
- Marquer d'une croix toutes les lignes ayant un 0 exécuté sur une colonne marquée.
- Répéter simultanément les opérations 2 et 3 jusqu'à ne plus pouvoir marquer de ligne et de colonnes.
- Tracer un trait sur toutes les lignes non marquées et sur toutes les colonnes marquées.

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	3	0	1	4
Salarié 2	2	2	3	4
Salarié 3	0	0	6	7
Salarié 4	-	-	-	-

4.4 Étape 4 : Modification du tableau

- Sélectionner les cases non traversées par un trait, et identifier le nombre le plus petit.
- Soustraire à toutes les cases ce nombre.
- Ajouter ce nombre aux points d'intersections des traits.

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	3	0	1	4
Salarié 2	2	2	3	4
Salarié 3	-	-	-	-
Salarié 4	-	-	-	-

Matrice finale et itération

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	2	0	0	3
Salarié 2	1	0	1	2
Salarié 3	0	(2)	0	0
Salarié 4	3	(2)	0	5

On obtient alors une nouvelle matrice sur laquelle on pourra répéter la succession des étapes 3 à 4.

Étape 3 (répétition) : Marquage des lignes et colonnes

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	2			3
Salarié 2	1		1	2
Salarié 3		(2)		
Salarié 4	3	(2)		5

Étape 4 (répétition) : Modification du tableau

Le plus petit élément parmi les cases non traversées est 1.

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	1	0	0	2
Salarié 2	0	0	1	1
Salarié 3	0	(3)	0	0
Salarié 4	2	(2)	0	4

Solution optimale finale

Après cette itération, on obtient la solution optimale :

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	1			2
Salarié 2			1	1
Salarié 3		(3)		
Salarié 4	2	(2)		4

Affectation optimale :

- Salarié 1 → Client 3
- Salarié 2 → Client 1
- Salarié 3 → Client 2 (coût : 2)
- Salarié 4 → Client 4

Coût total minimum = $5 + 6 + 6 + 4 = 21$

5 Algorithmme de König Version 2

5.1 LES ÉTAPES DE LA MÉTHODE D'AFFECTION

Prenons le même exemple de n salariés (ligne) et n clients (colonne), d'où le problème est d'attribuer chaque salarié à chaque client de sorte que le coût total de déplacements soit le minimum possible.

5.2 Tableau initial

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	10	5	6	10
Salarié 2	7	2	4	5
Salarié 3	7	6	5	6
Salarié 4	9	5	8	10

5.3 Réduction des lignes

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	5	0	1	5
Salarié 2	5	0	2	3
Salarié 3	2	1	0	1
Salarié 4	4	0	3	5

5.4 Réduction des colonnes

	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4
Salarié 1	3	0	1	4
Salarié 2	3	0	2	2
Salarié 3	0	1	0	0
Salarié 4	2	0	3	4