الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف
ملحقة المدرسة العليا للأساتذة
التحليل 1

السنة الجامعية: 2025-2026
الطور المتوسط - رياضيات
السنة الأولى

السلسلة الرابعة

التمرين ١ باستعمال التعريف, أدرس قابلية الإشتقاق عند النقطة x_0 للدوال التالية:

. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0.$

. $g(x) = \sqrt{x-2}, \quad x_0 = 2.$

. $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0.$

. $k(x) = \begin{cases} \sin x \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad x_0 = 0.$

. $p(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-a^2}), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}, \qquad |x_0| = a, \quad a \in \mathbb{R}_+.$

التمرين ٢ ١. لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x > 1 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. احسب $f'(x)$.

٢. لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بواسطة:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < e \\ a \ln x + b, & x \geq e \end{cases}$$

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. احسب $g'(x)$.

التمرين ٣ احسب المشتقة من الدرجة n للدوال التالية::

. $y_1(x) = \ln(1+x).$

. $y_2(x) = \dfrac{1+x}{1-x}.$

. $y_3(x) = (x+1)^3 e^{-x}.$

. $y_4(x) = x^2 \sin 3x.$

. $y_5(x) = \sin^2 x$

. $y_6(x) = e^x \sin x$

التمرين ٤ ١. لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بواسطة: $f(x) = (1-k)^2x^2+(1+k)x^3,\ \ k \in \mathbb{R}$.
-حدد قيم k التي يكون فيها المبدأ $(x=0)$ قيمة حدية عظمى لـ f.

٢. حدد القيم الحدية لـ $f(x) = sinx^2$ على المجال $[0,\pi]$.

٣. حدد القيم الحدية لـ $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ على $\mathbb{R}$.

التمرين ٥ هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدوال التالية:

. $f(x) = \sin^2 x,\ on\ [0,\pi].$

. $g(x) = \dfrac{\sin x}{2x},\ on\ [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}].$

التمرين ٦ (بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية)

. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < x < y : \qquad x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$

. $a \leq \sqrt{a^2+x^2} \leq a + \dfrac{x^2}{a}, \quad \forall a > 0.$

التمرين ٧ بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على $f = \ln x$ في المجال $[n, n+1]$, برهن أن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

التمرين ٨ باستخدام قاعدة لوبيتال، احسب النهايات التالية:

. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1}$.

. $\lim_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$.

. $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$.

. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

. $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x^2}$