باب 5

الأعداد العقدية

1.5 تعريف الأعداد العقدية

تعريف 1.5: عدد عقدي

العدد العقدي هو عدد على الشكل $z = a + ib$ حيث:

- $a, b \in \mathbb{R}$
- i هي الوحدة التخيلية وتحقق $i^2 = -1$
- a جزء حقيقي ويرمز له $\Re(z)$
- b جزء تخيلي ويرمز له $\mathrm{Im}(z)$

مجموعة الأعداد العقدية ترمز بـ $\mathbb{C}$.

2.5 التمثيل الهندسي للأعداد العقدية

تعريف 2.5: المستوى العقدي

يمكن تمثيل العدد العقدي $z = a + bi$ كنقطة $M(a, b)$ في المستوى الإحداثي، حيث:

- المحور الأفقي يمثل الأجزاء الحقيقية

• المحور العمودي يمثل الأجزاء التخيلية

تعريف 3.5: مرافق عدد عقدي

مرافق العدد العقدي $z = a + bi$ هو العدد $\overline{z} = a - bi$

3.5 طاولة وعمدة عدد عقدي

تعريف 4.5: طاولة عدد عقدي

طاولة العدد العقدي $z = a + bi$ هي العدد الحقيقي الموجب:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وتمثل المسافة من النقطة $M(a, b)$ إلى الأصل.

تعريف 5.5: عمدة عدد عقدي

عمدة العدد العقدي $z = a + bi$ هي الزاوية θ المحصورة بين المتجه $\overrightarrow{OM}$ والمحور الحقيقي.

4.5 الشكل المثلثي للعدد العقدي

نظرية 1.5: الشكل المثلثي

كل عدد عقدي $z = a + bi$ يمكن كتابته على الشكل:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث:

- $r = |z|$ هو الطاولة
- $\theta = \arg(z)$ هو العمدة

مثال 1.5: تحويل إلى شكل مثلثي

العدد $z = 1 + i$ يمكن كتابته:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

5.5 الشكل الأسي للعدد العقدي

نظرية 2.5: صيغة أويلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

برهان 1.5: برهان صيغة أويلر

لإثبات صيغة أويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، نستخدم متسلسلة تايلور للدوال الأسية والمثلثية.

1. **متسلسلة تايلور للدالة الأسية:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2. بالتعويض $x = i\theta$:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

3. باستخدام $i^2 = -1$، $i^3 = -i$، $i^4 = 1$، إلخ:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

4. تجميع الأجزاء الحقيقية والتخيلية:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

5. متسلسلة تايلور لجيب التمام والجيب:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

6. بالمقارنة نجد:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وبهذا نكون قد أثبتنا صيغة أويلر.

تعريف 6.5: الشكل الأسي

العدد العقدي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ يمكن كتابته:

$$z = re^{i\theta}$$

نظرية 3.5: ضرب وقسمة الأعداد العقدية

لأي عددين عقديين $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$:

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$، $z_2 \neq 0$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$ (صيغة دي موافر)

برهان 2.5: صيغة دي موافر

تكن الأعداد العقدية على الشكل القطبي

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

نحسب القوة n لـ z:

$$z^n = (re^{i\theta})^n.$$

باستعمال خاصية القوى نحصل على:

$$z^n = r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

وبذلك نحصل على الصيغة

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

وهي ما يسمى بصيغة دي موافر.

6.5 الجذر النوني للعدد العقدي

نظرية 4.5: الجذور النونية

للعثور على الجذور النونية للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

برهان 3.5: برهان مفصل لنظرية الجذور النونية

نأخذ عدداً عقدياً على الشكل

$$z = re^{i\theta}, \qquad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

ونريد إيجاد جميع الأعداد العقدية w التي تحقق

$$w^n = z.$$

الخطوة 1: كتابة عدد عام w بالشكل القطبي.
كل عدد عقدي غير منعدم يمكن كتابته على الشكل

$$w = \rho\, e^{i\phi}, \qquad \rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R}.$$

وعليه فإن

$$w^n = (\rho\, e^{i\phi})^n = \rho^n\, e^{in\phi}.$$

الخطوة 2: مساواة المقادير العقدية.
حتى يحقق $w^n = z$ يجب أن تتساوى القيم المطلقة وتتساوى الزوايا (مع السماح باختلاف بمضاعف 2π)، أي:

$$\rho^n = r, \qquad n\phi = \theta + 2k\pi$$

حيث k عدد صحيح.

الخطوة 3: إيجاد ρ و ϕ.
من المعادلة الأولى:

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

ومن الثانية:

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

الخطوة 4: تمييز الجذور المختلفة.
لأن تغيّر k بمقدار n يضيف 2π إلى الزاوية وهو ما يعطي نفس العدد العقدي، فإن القيم المختلفة لـ w تنتج عند اختيار:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

وبذلك تكون الجذور هي:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

الخطوة 5: حالة $r = 0$.
إذا كان $r = 0$ فإن $z = 0$، والجذر الوحيد هو:

$$w = 0,$$

وهذا متوافق مع الصيغة السابقة لأن $\sqrt[n]{0} = 0$.

ومن ثم يكون مجموعة الجذور النونية للعدد z هي:

$$\left\{ \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

مثال 2.5: جذور مكعبة لعدد عقدي

نأخذ العدد

$$z = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad (r = 8,\ \theta = \tfrac{\pi}{3}),$$

ونريد إيجاد جميع الجذور النونية مع $n = 3$.

1. حسب نظرية الجذور النونية، الجذور هي

$$w_k = \sqrt[3]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{3}}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

2. هنا $\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{8} = 2$ و

$$\phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{3} = \frac{\pi/3 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

إذن الجذور بالصيغة القطبية هي

$$w_k = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

3. نكتبها أيضاً بالشكل الجبري (تقريباً):

$$w_0 = 2\big(\cos\tfrac{\pi}{9} + i\sin\tfrac{\pi}{9}\big) \approx 1.879385 + 0.684040\, i,$$
$$w_1 = 2\big(\cos\tfrac{7\pi}{9} + i\sin\tfrac{7\pi}{9}\big) \approx -1.532089 + 1.285575\, i,$$
$$w_2 = 2\big(\cos\tfrac{13\pi}{9} + i\sin\tfrac{13\pi}{9}\big) \approx -0.347296 - 1.969616\, i.$$

4. تحقق سريع: لكل جذر w_k لدينا $|w_k| = 2$ فيكون $|w_k|^3 = 8$، وزاوية w_k مضروبة في 3 تعطي

$$3\phi_k = 3\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

وبالتالي $z = 8e^{i\pi/3} = 8e^{i(\pi/3+2k\pi)} = w_k^3$.

7.5 الجذور النونية للوحدة

تعريف 7.5: جذور الوحدة

الجذور النونية للوحدة هي حلول المعادلة $z^n = 1$ وتعطى بالصيغة:

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

مثال 3.5: جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

ريد إيجاد جميع حلول المعادلة

$$z^4 = 1.$$

1. حسب تعريف جذور الوحدة من الدرجة n، فإن الجذور تعطى بالصيغة:

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

2. نحسب القيم لكل k:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= e^{i\cdot 0} = 1,\\
\omega_1 &= e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\\
\omega_2 &= e^{i\frac{4\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1,\\
\omega_3 &= e^{i\frac{6\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.
\end{aligned}$$

3. إذن جذور الوحدة من الدرجة الرابعة هي:

$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

4. نتحقق:

$$1^4 = 1, \quad i^4 = 1, \quad (-1)^4 = 1, \quad (-i)^4 = 1.$$

نظرية 5.5: خصائص جذور الوحدة

- $\omega_0 = 1$
- $\omega_k^n = 1$
- $\omega_k \cdot \omega_m = \omega_{k+m \pmod n}$
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ إذا كان $n > 1$

برهان 4.5: برهان خصائص جذور الوحدة

تكن جذور الوحدة من الدرجة n معرّفة بما يلي:

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

الخاصية 1: إثبات أن $\omega_0 = 1$.
لدينا

$$\omega_0 = e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{n}} = e^0 = 1.$$

الخاصية 2: إثبات أن $\omega_k^n = 1$.
باستخدام خواص الأسس:

$$\omega_k^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\frac{2k\pi}{n}\cdot n} = e^{i2k\pi}.$$

ولأن $e^{i2k\pi} = 1$ لكل $k \in \mathbb{Z}$، نحصل على

$$\omega_k^n = 1.$$

الخاصية 3: إثبات أن $\omega_k \cdot \omega_m = \omega_{k+m \pmod n}$.
نحسب:

$$\omega_k \cdot \omega_m = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2m\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+m)\pi}{n}}.$$

إذا كان $k + m < n$، فإن

$$e^{i\frac{2(k+m)\pi}{n}} = \omega_{k+m}.$$

وإذا كان $k + m \geq n$، نكتب:

$$e^{i\frac{2(k+m)\pi}{n}} = e^{i\frac{2((k+m)-n)\pi}{n}} \cdot e^{i2\pi} = e^{i\frac{2((k+m) \bmod n)\pi}{n}},$$

وبالتالي:

$$\omega_k \cdot \omega_m = \omega_{k+m \bmod n}.$$

الخاصية 4: إثبات أن $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ إذا كان $n > 1$.
المجموع يشكل متتالية هندسية أساسها $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ وطرفها الأول $\omega_0 = 1$:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \cdots + \omega_1^{n-1}.$$

نستخدم صيغة مجموع المتتالية الهندسية:

$$S = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1}.$$

لكن

$$\omega_1^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{i2\pi} = 1.$$

إذن:

$$S = \frac{1 - 1}{1 - \omega_1} = 0.$$

ومن ثم

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$$

لكل $n > 1$.

وبهذا تثبت جميع الخصائص المطلوبة.

8.5 المعادلات الجبرية في $\mathbb{C}$

نظرية 6.5: المبرهنة الأساسية في الجبر

كل معادلة حدودية من الدرجة n ذات معاملات عقدية لها exactly n جذر في $\mathbb{C}$ (عدا التكرار).

مثال 4.5: حل معادلة تربيعية

لحل $z^2 + 4z + 13 = 0$:

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$$