باب 4

العمليات الداخلية و البنى الجبرية الاساسية

1.4 قانون التركيب الداخلي

تعريف 1.4: قانون تركيب داخلي

ليكن E مجموعة غير خالية.

1. **قانون التركيب الداخلي** على E هو تطبيق من $E \times E$ إلى E. إذا رمزنا لهذا التطبيق بـ T، فإن صورة الزوج $(x, y) \in E \times E$ بواسطة T تُرمز بـ xTy.

2. **مجموعة مزودة بقانون تركيب** هي أي زوج (E, T) حيث E مجموعة غير خالية و T قانون تركيب داخلي على E.

مثال 1.4: أمثلة على قوانين التركيب الداخلي

أكثر قوانين التركيب الداخلي شيوعاً هي:

1. الجمع $+$ في $\mathbb{N}$، $\mathbb{N}^*$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، ولكن ليس في $\mathbb{Z}^*$، $\mathbb{Q}^*$، $\mathbb{R}^*$، $\mathbb{C}^*$

2. الطرح $-$ في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$

3. الضرب $\times$ في $\mathbb{N}$، $\mathbb{N}^*$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$

4. القسمة $\div$ في $\mathbb{Q}^*$، $\mathbb{R}^*$، $\mathbb{C}^*$

5. التركيب $\circ$ (تركيب التطبيقات) المعلّف على مجموعة التطبيقات من E إلى E
6. القانون $\oplus$ المعلّف على $\mathbb{R}^2$ بـ $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
7. القانون T المعلّف على $\mathbb{R}$ بـ $xTy = x + y - 8$
8. قوانين $\cup$، $\cap$ (الاتحاد، التقاطع) المعلّقة على $\mathcal{P}(E)$ (مجموعة الأجزاء لمجموعة E)

تعريف 2.4: خصائص قوانين التركيب

ليكن (E, T) مجموعة مُزَوَّدة بقانون تركيب.

1. يُسمى القانون T **تجميعياً** على E إذا كان $(xTy)Tz = xT(yTz)$ لكل x, y, z في E.
2. يُسمى القانون T **تبديليا** على E إذا كان $xTy = yTx$ لكل x, y في E.

مثال 2.4: أمثلة على الخصائص

الجمع والضرب هما **تجميعيان** و**تبديليان** على $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

تعريف 3.4: العنصر الحيادي ونظير عنصر

ليكن (E, T) مجموعة مُزَوَّدة بقانون تركيب.

1. يُسمى العنصر e من E **حيادياً** للقانون T إذا كان،
$$\forall x \in E, \quad xTe = eTx = x$$
2. إذا كان (E, T) يحتوي على عنصر محايد e، فإن العنصر x من E يقال عنه أنه **قابل للعكس** للقانون T إذا وجد عنصر x' في E بحيث:
$$xTx' = x'Tx = e$$
يُسمى العنصر x' عندئذٍ **نظير** العنصر x للقانون T.

نظرية 1.4: وجود ووحدانية العنصر المحايد

ليكن (E, T) مجموعة مُزَوَّدة بقانون تركيب. إذا وجد العنصر الحيادي في E للقانون T، فإنه وحيد.

برهان 1.4: برهان وحدانية العنصر المحايد

لنفترض وجود عنصرين حياديين e و e'. عندئذٍ،

$$e' = eTe' = e$$

مما يعني أن $e = e'$.

نظرية 2.4: خصائص العناصر المتناظرة

ليكن (E, T) مجموعة مُزَوَّدة بقانون تركيب حيث القانون T تجميعي وله عنصر محايد.

1. إذا كان $x \in E$ قابلًا للتماثل، فإن عنصره المتناظر وحيد.
2. إذا كان $x \in E$ و $y \in E$ قابلين للتماثل، فإن xTy قابل للتماثل وعنصره المتناظر $(xTy)'$ يُعطى بالعلاقة $(xTy)' = y'Tx'$ حيث x' يشير إلى العنصر المتناظر لـ x و y' يشير إلى العنصر المتناظر لـ y.

برهان 2.4: برهان خصائص العناصر المتناظرة

1. لنفترض أن للعنصر x عنصرين متناظرين x' و x''. عندئذٍ،

$$xTx' = e \Rightarrow x''T(xTx') = x'' \Rightarrow (x''Tx)Tx' = x'' \Rightarrow x' = x''$$

2. لدينا

$$(y'Tx')T(xTy) = y'T(x'Tx)Ty = y'TeTy = y'Ty = e$$

وأيضًا،

$$(xTy)T(y'Tx') = xT(yTy')Tx' = xTeTx' = xTx' = e$$

وبالتالي، $(xTy)' = y'Tx'$.

2.4 الزمر

تعريف 4.4: زمرة

ليكن (G, T) مجموعة مُزَوَّدة بقانون تركيب.

1. نقول أن (G, T) **زمرة** إذا:

   (ا) كان العملية T تجميعية على G،

   (ب) وجد عنصر محايد للعملية T في G،

   (ج) كان كل عنصر من G قابلًا للتماثل للعملية T.

   ونقول أيضًا أن المجموعة G لها **بنية زمرة** للعملية T.

2. نقول أن الزمرة (G, T) **إبدالية** (أو أبيلية) إذا كانت العملية T إبدالية على G.

مثال 3.4: أمثلة على الزمر

أولاً، نقدم أمثلة على الزمر:

1. $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$ المزودة بعملية الجمع.
2. $\mathbb{Z}^*$، $\mathbb{Q}^*$، $\mathbb{R}^*$ المزودة بعملية الضرب.

مثال 4.4: أمثلة على ليست زمر

لأسباب مختلفة (يجب تحديدها)، الأزواج التالية ليست زمر:

1. $(\mathbb{N}, +)$، $(\mathbb{R}, \times)$.
2. $(\mathcal{P}(E), \cup)$، $(\mathcal{P}(E), \cap)$.

تعريف 5.4: زمر جزئية

زمرة جزئية من زمرة $(G,*)$ هي مجموعة جزئية غير خالية H من G بحيث:

1. يُحدد $*$ قانون تركيب داخلي على H.
2. بهذا القانون، تشكل H زمرة. نرمز لهذا بـ $H < G$.

نظرية 3.4: شروط الزمرة الجزئية

المجموعة الجزئية $H \subset G$ هي زمرة جزئية من زمرة $(G,*)$ إذا وفقط إذا:

1. $H \neq \emptyset$,
2. $\forall (x,y) \in H^2; \quad x * y \in H$,
3. $\forall x \in H; \quad x^{-1} \in H$.

مثال 5.4: أمثلة على الزمر الجزئية

1. لتكن $(G,*)$ زمرة. فإن G و $\{e_G\}$ هما زمرتان جزئيتان من G.
2. $(\mathbb{Z},+)$ هي زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$.

نظرية 4.4: شرط آخر للزمرة الجزئية

المجموعة الجزئية $H \subset G$ هي زمرة جزئية من زمرة $(G,*)$ إذا وفقط إذا:

1. $H \neq \emptyset$,
2. $\forall (x,y) \in H^2; \quad x * y^{-1} \in H$.

نظرية 5.4: تقاطع الزمر الجزئية

تقاطع أي عائلة من الزمر الجزئية لزمرة $(G,*)$ هو زمرة جزئية من $(G,*)$.

برهان 3.4: برهان تقاطع الزمر الجزئية

لتكن $(H_i)_{i\in I}$ عائلة من الزمر الجزئية لزمرة G. عرف $K=\bigcap_{i\in I} H_i$، تقاطع جميع H_i. المجموعة K غير خالية لأنها تحتوي على العنصر المحايد e، الذي ينتمي إلى كل زمرة جزئية H_i. ليكن x و y عنصرين من K. من أجل كل $i\in I$، لدينا $x*y^{-1}\in H_i$ لأن H_i زمرة جزئية. لذلك، $x*y^{-1}\in K$. هذا يبرهن أن K زمرة جزئية من G.

ملاحظة 1.4: ملاحظة حول اتحاد الزمر الجزئية

الاتحاد التعسفي للزمر الجزئية لزمرة $(G,*)$ ليس بالضرورة زمرة جزئية من $(G,*)$.

مثال 6.4: مثال على اتحاد الزمر الجزئية

ليكن T قانون التركيب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^2$ بـ:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\quad (x_1,y_1)*(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

لدينا $(\mathbb{R}^2,T)$ زمرة، $\mathbb{R}\times\{0\}$ و $\{0\}\times\mathbb{R}$ زمرتان جزئيتان من $(\mathbb{R}^2,T)$ لكن $\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{R}$ لا تشكل زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^2,T)$.

نظرية 6.4: اتحاد زمرتين جزئيتين

اتحاد زمرتين جزئيتين H و K من نفس الزمرة $(G,*)$ هو زمرة جزئية $(H\cup K<G)$ إذا وفقط إذا $K\subset H$ أو $H\subset K$.

برهان 4.4: برهان اتحاد زمرتين جزئيتين

افترض أن $H\cup K$ زمرة جزئية من G و H غير محتواة في K، أي يوجد $h\in H$ بحيث $h\notin K$. لنبين أن $K\subset H$. خذ أي $k\in K$. لدينا $h*k\in H\cup K$. لكن $h*k\notin K$ لأن ذلك سيعني $h=(h*k)*k^{-1}\in K$. إذن، $h*k\in H$، مما يعني $k=h^{-1}*(h*k)\in H$.

3.4 تماثل الزمر

تعريف 6.4: تماثل الزمر

لتكن $(G,*)$ و (H,T) زمرتين. الدالة f من G إلى H هي **تشاكل زمر** إذا كان:

$$\forall x, y \in G, \quad f(x * y) = f(x) T f(y)$$

علاوة على ذلك:

1. إذا كانت $H = G$ و $T = *$، فإنها تُسمى **تماثل داخلي**.
2. إذا كانت f تقابلية، فإنها **تماثل مطابق**.
3. إذا كانت f تماثل داخلي تقابلي، فإنها **تشاكل ذاتي**.

مثال 7.4: تشاكل ذاتي

التطبيق $x \mapsto 2x$ يُعرّف تشاكل ذاتي لـ $(\mathbb{R}, +)$.

مثال 8.4: تشاكل زمر

الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$، حيث $\mathbb{R}_+^*$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة تحت عملية الضرب، المعرفة بـ $f(x) = \exp(x)$، هي تشاكل زمر من $(\mathbb{R}, +)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ لأن $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$.

نظرية 7.4: خصائص تشاكلات الزمر

لتكن f تشاكل من $(G,*)$ إلى (H,T):

1. $f(e_G) = e_H$.
2. $\forall x \in G, \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
3. إذا كانت f تشاكل مطابق، فإن معكوسها f^{-1} هو أيضاً تشاكل مطابق من (H,T) إلى $(G,*)$.

4. إذا كانت $G' < G$ (زمرة جزئية من G)، فإن $f(G') < H$.

5. إذا كانت $H' < H$ (زمرة جزئية من H)، فإن $f^{-1}(H') < G$.

تعريف 7.4: نواة وصورة التشاكل

لتكن f تشاكل من G إلى H:

1. **نواة** f، وترمز $\text{Ker}(f)$، هي مجموعة السوابق لـ e_H:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_H\} = f^{-1}(\{e_H\})$$

(ملاحظة: لا يُفترض أن f تقابلية، وبالتالي لا يوجد ذكر للمعكوس التقابلي لـ f).

2. **صورة** f، وترمز $\text{Im}(f)$، هي $f(G)$ (مجموعة صور عناصر G بواسطة f).

ملاحظة 2.4: نواة وصورة التشاكل كزمر جزئية

طبقاً للنقطتين الأخيرتين من النظرية (7.2.3)، فإن نواة وصورة f هما زمرتان جزئيتان على التوالي من G و H.

نظرية 8.4: شروط القابلية للتطبيق والتطبيق المتباين للتشاكل

لتكن f تشاكلًا من $(G, *)$ إلى (H, T):

1. f غامر إذا وفقط إذا كان $\text{Im}(f) = H$.

2. f متباين إذا وفقط إذا كان $\text{Ker}(f) = \{e_G\}$.

برهان 5.4: برهان شروط القابلية للتطبيق والتطبيق المتباين للتشاكل

تتبع النقطة (1) مباشرة من تعريف التطبيق الغامر. لبرهان (2)، افترض أولاً أن f متباين. ليكن $x \in \text{Ker}(f)$. إذن $f(x) = e_H$، وبما أن $f(e_G) = e_H$ كما ورد، نستنتج أن $f(x) =$

$f(e_G)$، مما يعني $x = e_G$ بواسطة تباين f. thus, $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$. بالمقابل، افترض أن $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$ وبيّن أن f متباين. Consider $x, y \in G$ بحيث $f(x) = f(y)$. إذن $f(x)Tf(y)^{-1} = e_H$، لذا $f(x * y^{-1}) = e_H$، مما يعني أن $x * y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$. الافتراض $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$ إذن يعني $x * y^{-1} = e_G$، وبالتالي $x = y$. تبين أن f متباين، مما يكمل البرهان.

4.4 بنية الحلقة

تعريف 8.4: حلقة

الحلقة هي مجموعة غير خالية مُزودة بعمليتين داخايتين $(A, *, T)$ بحيث:

1. $(A, *)$ زمرة تبديلية بعنصر محايد يُرمز له بـ 0_A.
2. العملية T تجميعية وتوزيعية على اليمين واليسار بالنسبة إلى $*$:

$$\forall x, y, z \in A, \quad xT(y*z) = xTy*xTz \quad \text{و} \quad (x*y)Tz = xTz*yTz$$

3. العملية T لها عنصر محايد مختلف عن 0_A، يُرمز له بـ 1_A.

مثال 9.4: أمثلة على الحلقات

$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, و $(\mathbb{C}, +, \times)$ هي حلقات معروفة.

ملاحظة 3.4: ملاحظات

1. إذا كانت العملية $\times$ إبدالية، فإن الحلقة تسمى إبدالية أو أبيلية.
2. المجموعة $A - \{0_A\}$ ترمز بـ A^*.
3. للتبسيط، نستخدم مؤقتاً الرموز الجمعية $(+)$ والضربية $(\times)$ بدلاً من العمليات الداخلية $*$ و T. لذلك، نشير إلى الحلقة بـ $(A, +, \times)$ بدلاً من $(A, *, T)$.

تعريف 9.4: حلقة تامة

1. الحلقة التبديلية $(A, +, \times)$ تسمى تامة إذا كانت:

   (ا) غير منعدمة (أي $1_A \neq 0_A$)،

   (ب) $\forall (x, y) \in A^2; \quad x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0$ أو $y = 0)$.

2. عندما يكون حاصل الضرب $a \times b$ صفراً ولكن لا a ولا b صفر، يُسمى a و b قواسم الصفر.

نظرية 9.4: قواعد في الحلقات

لتكن $(A, +, \times)$ حلقة. القواعد التالية تنطبق في الحلقات:

1. $x \times 0_A = 0_A \times x = 0_A$. العنصر 0_A ممتص للعملية $\times$.
2. $\forall (x, y) \in A^2; \quad (-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y)$.
3. $\forall x \in A; \quad (-1_A) \times x = -x$.
4. $\forall (x, y) \in A^2; \quad (-x) \times (-y) = x \times y$.
5. $\forall (x, y, z) \in A^3; \quad x \times (y - z) = x \times y - x \times z$ و $(y - z) \times x = y \times x - z \times x$.

برهان 6.4: برهان قواعد الحلقات

1. $x \times 0_A = x \times (0_A + 0_A) = x \times 0_A + x \times 0_A$. لذلك، وبسبب انتظام العناصر في الزمرة $(A, +)$، $x \times 0_A = 0_A$. بالمثل للطرف الآخر.
2. $0_A = 0_A \times y = (x + (-x)) \times y = x \times y + (-x) \times y$. إذن، $(-x) \times y = -(x \times y)$. بالمثل للمساواة الأخرى.
3. $0_A = 0_A \times x = (-1_A + 1_A) \times x = (-1_A) \times x + 1_A \times x = (-1_A) \times x + x$. وبالتالي، $(-1_A) \times x = -x$.

4. تُترك للقارئ.

5. تُترك للقارئ.

نظرية 10.4: شروط الحلقة الجزئية

المجموعة الجزئية A_1 من A هي حلقة جزئية إذا وفقط إذا:

1. $(A_1, *)$ زمرة جزئية من $(A, *)$;
2. $1_A \in A_1$;
3. $\forall (x, y) \in A_1^2; \quad xTy \in A_1$ (T تحدث عملية ثنائية على A_1).

مثال 10.4: أمثلة على الحلقات الجزئية

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ هي حلقة جزئية من $(\mathbb{Q}, +, \times)$، والتي هي حلقة جزئية من $(\mathbb{R}, +, \times)$، والتي هي حلقة جزئية من $(\mathbb{C}, +, \times)$.

5.4 بنية الحقل

تعريف 10.4: حقل

1. الحقل هو حلقة تبديلية يكون فيها كل عنصر غير صفري قابلًا للعكس.
2. علاوة على ذلك، إذا كانت العملية الثانية $\times$ تبديلية على $\mathbf{K}$، فإننا نقول أن الحقل $(\mathbf{K}, +, \times)$ إبدالي.

مثال 11.4: أمثلة على الحقول

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ و $(\mathbb{R}, +, \times)$ هما حقول إبدالية.

تعريف 11.4: حقل جزئي

لتكن $(\mathbf{K}, +, \times)$ حقلاً وليكن $\mathbf{K}_1$ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbf{K}$. نقول أن $\mathbf{K}_1$ حقل جزئي من $\mathbf{K}$ إذا كانت $\mathbf{K}_1$ مستقرة تحت $+$ و $\times$ في $\mathbf{K}$، و $\mathbf{K}_1$ المجهزة بالعمليات المُحدثة من $\mathbf{K}$ تشكل حقلاً بذاتها.

مثال 12.4: مثال على الحقل الجزئي

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ هو حقل جزئي من $(\mathbb{R}, +, \times)$.

نظرية 11.4: شروط الحقل الجزئي

لتكن $(\mathbf{K}, +, \times)$ حقلاً. مجموعة جزئية $\mathbf{K}_1$ من $\mathbf{K}$ هي حقل جزئي إذا وفقط إذا:

1. $(\mathbf{K}_1, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbf{K}, +)$,
2. لكل $x, y \in \mathbf{K}_1$, $x \times y \in \mathbf{K}_1$ (استقرار $\mathbf{K}_1$ تحت $\times$),
3. $\mathbf{K}_1$ تحتوي على العنصر المحايد لـ $\mathbf{K}$، ومعكوس كل $x \in \mathbf{K}_1$ في $(\mathbf{K}, \times)$ هو أيضاً عنصر من $\mathbf{K}_1$.

6.4 تمارين

تمرين 1.4

على $\mathbb{R}$ نعتبر العملية الثنائية $*$ المعرفة بـ $x * y = x + y - xy$. هل هذه العملية تجميعية، إبدالية؟ هل لها عنصر محايد؟ هل لعدد حقيقي x معكوس تحت هذه العملية؟ اذكر صيغة للقوة n لعنصر x تحت هذه العملية.

تمرين 2.4

نعرف قانون تركيب داخلي $*$ على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; \quad a * b = \ln(e^a + e^b)$$

ما هي خصائصه؟ هل له عنصر محايد؟ هل هناك عناصر منتظمة؟

تمرين 3.4

نعطى قانون تركيب داخلي معرف بالعلاقة:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+; \quad x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

بين أن هذه العملية إبدالية، تجميعية، وأنه يوجد عنصر محايد. بين أنه لا يوجد لعنصر ما معكوس لهذه العملية.

تمرين 4.4

نعرف، لكل (x,y) و (x',y') في $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$، العملية $\star$ بالعلاقة:

$$(x,y) \star (x',y') = (xx', xy' + y)$$

أثبت أن $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ زمرة. هل هي إبدالية؟ بسط $(x,y)^n$ لكل $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ولكل $n \in \mathbb{N}^*$.

تمرين 5.4

نعرف على $\mathbb{R}$، قانون التركيب $\circ$ بالعلاقة:

$$x \circ y = x + y - 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

1. بين أن $(\mathbb{R},\circ)$ زمرة إبدالية.
2. ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعرف $x^{(1)}=x$ و $x^{(n+1)}=x^{(n)}\circ x$.
   (ا) احسب $x^{(2)}$؛ $x^{(3)}$؛ و $x^{(4)}$.
   (ب) بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}$: $x^{(n)}=nx-2(n-1)$.
3. لتكن $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x \text{ زوجي}\}$. بين أن $(A,\circ)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R},\circ)$.

تمرين 6.4

التمرين 3: لتكن $(G,\cdot)$ زمرة، ونرمز بـ $Z(G)=\{x\in G\mid \forall y\in G, xy=yx\}$ لمركز G.

1. بين أن $Z(G)$ زمرة جزئية من G.
2. بين أن G إبدالية إذا وفقط إذا كان $Z(G)=G$.

تمرين 7.4

لتكن $(G,\cdot)$ زمرة غير إبدالية بعنصر محايد e. من أجل $a\in G$، عرف الدالة $f_a:G\to G$ بالعلاقة:

$$f_a(x)=a\cdot x\cdot a^{-1}$$

1. بين أن f_a تشاكل داخلي للزمرة $(G,\cdot)$.
2. تحقق أنه لكل $a,b\in G$، $f_a\circ f_b=f_{a\cdot b}$.
3. بين أن f_a تقابلية وحدد دالتها العكسية.

تمرين 8.4

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة بعناصر محايدة 0 و 1 للجمع والضرب على التوالي. نعرّف العمليتين $\star$ و $\diamond$ على A:

$$\forall a,b\in A,\quad a\star b=a+b+1$$

$$\forall a, b \in A, \quad a \diamond b = a \cdot b + a + b$$

1. بين أن $(A, \star, \diamond)$ حلقة.

2. بين أن التطبيق $f : (A, +, \cdot) \to (A, \star, \diamond)$ المعطى بالعلاقة $f(a) = a - 1$ هو تشاكل مطابق للحلقات.

تمرين 9.4

بين أن $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ حقل.