باب 3

التطبيقات

1.3 تعاريف

تعريف 1.3: تطبيق

ليكن E و F مجموعتين. التطبيق من E إلى F هو علاقة f تربط كل عنصر x من E بعنصر واحد فقط y من F. y يسمى صورة x بالتطبيق f و x هو سابقة y بالتطبيق f. نرمز للتطبيق بـ $f : E \to F$، ولصورة العنصر x بـ $f(x)$.

مثال 1.3: تطبيق

لتكن $E = \{1, 2, 3\}$ و $F = \{a, b, c\}$. التطبيق $f : E \to F$ معرف كالتالي:

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a$$

هذا تطبيق لأنه يربط كل عنصر من E بعنصر واحد فقط من F.

تعريف 2.3: تساوي تطبيقين

تطبيقان $f : E \to F$ و $g : E \to F$ متساويان إذا كان:

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

ونكتب $f = g$.

تعريف 3.3: تطبيق مطابق

التطبيق المطابق على مجموعة E هو التطبيق $id_E : E \to E$ المعرف بـ:

$$\forall x \in E, \quad id_E(x) = x.$$

تعريف 4.3: صورة مباشرة

للتطبيق $f : E \to F$ والمجموعة $A \subset E$، صورة A هي:

$$f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$$

تعريف 5.3: صورة عكسية

للتطبيق $f : E \to F$ والمجموعة $B \subset F$، الصورة العكسية لـ B هي:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

مثال 2.3: مثال شامل لتوضيح مفهومي السابقة والصورة

لتكن المجموعتين:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad F = \{a, b, c, d, e, f\}$$

ولنعرف التطبيق $f : E \to F$ كما يلي:

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a, \quad f(4) = c, \quad f(5) = d$$

مفهوم السابقة (الصورة العكسية)

السابقة لمجموعة $B \subset F$ هي مجموعة جميع العناصر في E التي تنتقل إلى عناصر في B عبر التطبيق f.

أمثلة على حساب السابقة:

- $f^{-1}(\{a, c\}) = \{x \in E \mid f(x) \in \{a, c\}\} = \{1, 3, 4\}$

- $f^{-1}(\{b,d\}) = \{x \in E \mid f(x) \in \{b,d\}\} = \{2,5\}$
- $f^{-1}(\{e\}) = \{x \in E \mid f(x) = e\} = \emptyset$
- $f^{-1}(\{a,b,f\}) = \{x \in E \mid f(x) \in \{a,b,f\}\} = \{1,2,3\}$

مفهوم الصورة (الصورة المباشرة)

الصورة لمجموعة $A \subset E$ هي مجموعة جميع القيم في F التي تأتي من عناصر في A عبر التطبيق f.
أمثلة على حساب الصورة:

- $f(\{1,3,5\}) = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{a,a,d\} = \{a,d\}$
- $f(\{2,4\}) = \{f(2), f(4)\} = \{b,c\}$
- $f(\{1,2,4\}) = \{f(1), f(2), f(4)\} = \{a,b,c\}$
- $f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{a\}$

مقارنة بين المفهومين

- **السابقة**: نبدأ من مجموعة في F ونبحث عن عناصر E التي تنتقل إليها
- **الصورة**: نبدأ من مجموعة في E ونبحث عن قيم صورها في F
- السابقة تكون مجموعة في E
- الصورة تكون مجموعة في F

هنا $f(f^{-1}(Z)) = Z$

تعريف 6.3: تركيب تطبيقين

لتكن $F \to E : f$ و $g : F \to G$. تركيب g و f هو التطبيق $g \circ f : E \to G$ المعرف بـ:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ملاحظة 1.3: عدم تبديلية التركيب

تركيب التطبيقات ليس تبديلياً بشكل عام:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

حتى عندما يكون التركيبان معرّفين.

مثال 3.3: تركيب تطبيقين

لتكن $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x^2$، فإن:

$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1$$

وهما تطبيقان مختلفان.

2.3 أنواع التطبيقات

تعريف 7.3: التطبيق المتباين (Injective)

يُسمى التطبيق $f : E \to F$ **تطبيقًا متباينًا** إذا كان يحافظ على التميّز، أي أن العناصر المختلفة في المنطلق E لها صور مختلفة في الوصول F.

رياضياً:

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

أو بشكل مكافئ:

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

تعريف 8.3: التطبيق الغامر (Surjective)

يُسمى التطبيق $f : E \to F$ **تطبيقًا غامرًا** إذا كان يغطي جميع عناصر الوصول F، أي أن كل عنصر في F هو صورة لعنصر واحد على الأقل في E.

رياضياً:

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \text{ بحيث } f(x) = y$$

أو بشكل مكافئ: $f(E) = F$

تعريف 9.3: التطبيق المتقابل (Bijective)

يُسمى التطبيق $f : E \to F$ **تطبيقًا متقابلًا** إذا كان في نفس الوقت **متباينًا** و**غامرًا**. وهذا يعني:

- كل عنصر في E له صورة مختلفة في F (متباين)
- كل عنصر في F له سابق واحد في E (غامر)

وبالتالي يكون هناك تقابل تام بين عناصر E وعناصر F.

مثال 4.3: أمثلة على التطبيق المتباين

- التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = 2x + 1$ هو تطبيق متباين.
  السبب: إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ وبالتالي $x_1 = x_2$.
- التطبيق $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $g(x) = x^3$ هو تطبيق متباين.
  السبب: إذا كان $x_1^3 = x_2^3$ فإن $x_1 = x_2$.
- التطبيق $h : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ المعرّف بـ:
  $h(1) = a, \quad h(2) = b, \quad h(3) = c$ هو تطبيق متباين.
  السبب: كل عنصر في المنطلق له صورة مختلفة.

مثال 5.3: أمثلة على التطبيق الغامر

- التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = 2x + 1$ هو تطبيق غامر.
  السبب: لأي $y \in \mathbb{R}$، يوجد $x = \frac{y-1}{2}$ بحيث $f(x) = y$.
- التطبيق $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ المعرّف بـ $g(x) = x^2$ هو تطبيق غامر.
  السبب: كل عدد حقيقي غير سالب هو مربع لعدد حقيقي ما.
- التطبيق $h : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ المعرّف بـ:
  $h(1) = a, \quad h(2) = b, \quad h(3) = a$ هو تطبيق غامر.
  السبب: كل عنصر في الوصول $\{a, b\}$ له سابق في المنطلق.

مثال 6.3: أمثلة على التطبيق المتقابل

- التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = 2x + 1$ هو تطبيق متقابل.
السبب: هو متباين (كما في المثال الأول) وغامر (كما في المثال الثاني).

- التطبيق $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $g(x) = x^3$ هو تطبيق متقابل.
السبب: هو متباين وغامر.

- التطبيق $h : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ المعرّف بـ:
$h(1) = a, \quad h(2) = b, \quad h(3) = c$ هو تطبيق متقابل.
السبب: هو متباين (صور مختلفة) وغامر (يغطي جميع عناصر الوصول).

مثال 7.3: أمثلة على تطبيقات ليست متباينة ولا غامرة

- التطبيق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = x^2$ ليس متبايناً ولا غامراً.
السبب:
  - ليس متبايناً: $f(2) = f(-2) = 4$ مع أن $2 \neq -2$
  - ليس غامراً: $-1 \in \mathbb{R}$ ولكن لا يوجد x بحيث $x^2 = -1$

- التطبيق $g : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ المعرّف بـ:
$g(1) = a, \quad g(2) = b, \quad g(3) = a$ ليس متبايناً ولا غامراً.
السبب:
  - ليس متبايناً: $g(1) = g(3) = a$
  - ليس غامراً: c, d ليس لهما سابق في المنطلق

تعريف 10.3: تطبيق عكسي

إذا كان $f : E \to F$ متقابلاً، فإن له تطبيقاً عكسياً $f^{-1} : F \to E$ يحقق:

$$f^{-1} \circ f = id_E \quad \text{و} \quad f \circ f^{-1} = id_F$$

مثال 8.3: مثال على التطبيق العكسي

لتكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c, d\}$. لنعرف التطبيق $f : E \to F$ كما يلي:

$$f(1) = c, \quad f(2) = a, \quad f(3) = d, \quad f(4) = b$$

التحقق من أن التطبيق متقابل

- متباين: كل عنصر في E له صورة مختلفة في F
- غامر: كل عنصر في F له سابق في E

بما أن f متباين وغامر، فهو **متقابل** وبالتالي له تطبيق عكسي.

إيجاد التطبيق العكسي f^{-1}

لإيجاد التطبيق العكسي، نعكس العلاقة بين العناصر والصور:

$$f^{-1} : F \to E$$

$$f^{-1}(a) = 2, \quad f^{-1}(b) = 4, \quad f^{-1}(c) = 1, \quad f^{-1}(d) = 3$$

التحقق من خصائص التطبيق العكسي

- $f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(c) = 1$
- $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(a) = 2$
- $f(f^{-1}(a)) = f(2) = a$
- $f(f^{-1}(b)) = f(4) = b$

وهذا يحقق الشرط: $f^{-1} \circ f = id_E$ و $f \circ f^{-1} = id_F$

مثال 9.3: تطبيق عكسي دالي

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x) = 2x + 3$.

التحقق من أن التطبيق متقابل

- متباين: إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$ وبالتالي $x_1 = x_2$
- غامر: لأي $y \in \mathbb{R}$، يوجد $x = \frac{y-3}{2}$ بحيث $f(x) = y$

إيجاد التطبيق العكسي

لإيجاد f^{-1}، نحل المعادلة $y = 2x + 3$ بالنسبة لـ x:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

إذن التطبيق العكسي هو:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

التحقق

- $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$
- $f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3 = y$

ملاحظة 2.3: ملاحظة هامة

- التطبيق العكسي موجود فقط إذا كان التطبيق الأصلي متقابلًا
- إذا كان f متقابلًا، فإن $(f^{-1})^{-1} = f$
- تركيب تطبيقين متقابلين يعطي تطبيقًا متقابلًا، وعكسه: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3.3 عدد التطبيقات بين مجموعتين منتهيتين

نظرية 1.3: عدد التطبيقات

إذا كانت $|E| = n$ و $|F| = m$، فإن:

- عدد التطبيقات من E إلى F هو m^n
- عدد التطبيقات المتباينة من E إلى F هو $\frac{m!}{(m-n)!}$ إذا كان $n \leq m$
- عدد التطبيقات الغامرة من E إلى F يُحسب بصيغة أكثر تعقيداً

مثال 10.3: عدد التطبيقات

إذا كانت $E = \{1, 2, 3\}$ و $F = \{a, b\}$:

- عدد التطبيقات من E إلى F هو $2^3 = 8$
- عدد التطبيقات المتباينة هو $0 = \frac{2!}{(2-3)!}$ (لا يوجد لأن $n > m$)

برهان 1.3: برهان عدد التطبيقات

عدد التطبيقات من E إلى F هو m^n:

- لنفرض $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$
- لكل عنصر $x_i \in E$، لدينا m اختيارا لصورته في F
- بما أن الاختيارات مستقلة، فإن العدد الكلي للتطبيقات هو:

$$\underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_{n \text{ مرات}} = m^n$$

عدد التطبيقات المتباينة من E إلى F هو $\frac{m!}{(m-n)!}$ إذا كان $n \leq m$:

- للتطبيق المتباين، يجب أن تكون صور العناصر n مختلفة في F

- أول عنصر في E له m اختيار للصورة
- ثاني عنصر له $m-1$ اختيار (لأن الصورة يجب أن تختلف عن سابقتها)
- ثالث عنصر له $m-2$ اختيار
- وهكذا حتى العنصر n الذي له $m-n+1$ اختيار
- إذن عدد التطبيقات المتباينة هو:

$$m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال 11.3: تطبيق عملي على البرهان

لتكن $E=\{1,2,3\}$ و $F=\{a,b,c,d\}$ حيث $|E|=3$ و $|F|=4$.

- **عدد التطبيقات الكلي:** $4^3=64$
- **عدد التطبيقات المتباينة:** $24=\frac{24}{1}=\frac{4!}{(4-3)!}$

4.3 تمارين تطبيقية

تمرين 1.3: تمارين أساسية

1. لتكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c, d\}$ والتطبيق $f : E \to F$ المعرف بـ:

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a, \quad f(4) = c$$

احسب:

(ا) $f(\{1, 3\})$
(ب) $f(\{2, 4\})$
(ج) $f^{-1}(\{a, b\})$
(د) $f^{-1}(\{c, d\})$

2. هل التطبيقات التالية متباينة، غامرة، أم متقابلة؟ برر إجابتك.

(ا) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$
(ب) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad g(n) = 2n$
(ج) $h : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad h(x) = |x|$

3. لتكن $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = x^2 + 1$. أوجد:

(ا) $(f \circ g)(x)$
(ب) $(g \circ f)(x)$
(ج) هل $f \circ g = g \circ f$؟

تمرين 2.3: تمارين متقدمة

1. لتكن $f : E \to F$ تطبيقاً متقابلاً. أثبت أن:

$$\forall A \subset E, \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

و

$$\forall B \subset F, \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

2. إذا كان $|E| = 4$ و $|F| = 5$، فاحسب:

(ا) عدد التطبيقات من E إلى F
(ب) عدد التطبيقات المتباينة من E إلى F
(ج) عدد التطبيقات المتباينة من F إلى E

3. لتكن $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

(ا) بين أن f متقابل
(ب) أوجد f^{-1}
(ج) تحقق أن $f \circ f^{-1} = id$ و $f^{-1} \circ f = id$

4. لتكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ تطبيقين.

(ا) إذا كان f و g متباينين، أثبت أن $g \circ f$ متباين
(ب) إذا كان f و g غامرين، أثبت أن $g \circ f$ غامر
(ج) إذا كان $g \circ f$ متبايناً، فماذا يمكنك أن تقول عن f؟
(د) إذا كان $g \circ f$ غامراً، فماذا يمكنك أن تقول عن g؟

تمرين 3.3: تمارين تركيب التطبيقات

1. لتكن $f(x) = \frac{1}{x}$، $g(x) = x^2$، $h(x) = x + 1$. أوجد:

(ا) $(f \circ g)(x)$
(ب) $(g \circ h)(x)$
(ج) $(h \circ f \circ g)(x)$
(د) $(f \circ f)(x)$

2. أثبت أن تركيب التطبيقات عملية تجميعية، أي:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

3. إذا كان $f : E \to F$ متقابلاً، أثبت أن:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

تمرين 4.3: تمارين التطبيق العكسي

1. أوجد التطبيق العكسي لكل من:
   (ا) $f(x) = 5x - 3$
   (ب) $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$
   (ج) $h(x) = \sqrt[3]{x+1}$
2. لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x) = x^3 + 2$.
   (ا) بين أن f متقابل
   (ب) أوجد f^{-1}
   (ج) احسب $(f^{-1} \circ f)(2)$ و $(f \circ f^{-1})(10)$
3. إذا كان f و g تطبيقين متقابلين، أثبت أن:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

تمرين 5.3: تمارين الصورة والسابقة

1. لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x) = x^2$.
   (ا) احسب $f([-1, 2])$
   (ب) احسب $f^{-1}([1, 4])$
   (ج) احسب $f^{-1}(f([0, 1]))$
   (د) احسب $f(f^{-1}([-1, 4]))$

2. لتكن $f: E \to F$ تطبيقاً و $A, B \subset E$، أثبت أن:

(ا) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ب) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(ج) أعط مثالاً يبين أن $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ في الحالة العامة

3. لتكن $f: E \to F$ تطبيقاً و $C, D \subset F$، أثبت أن:

(ا) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(ب) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(ج) $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$

تمرين 6.3: تمارين متنوعة

1. إذا كانت $|E| = n$، فما عدد:

(ا) التطبيقات من E إلى E؟

(ب) التطبيقات المتباينة من E إلى E؟

(ج) التطبيقات المتقابلة من E إلى E؟

2. لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{fi} x \geq 0 \\ 2x & \text{fi} x < 0 \end{cases}$$

(ا) هل f متباينة؟

(ب) هل f غامرة؟

(ج) احسب $f([-2, 2])$

(د) احسب $f^{-1}([1, 4])$

3. أثبت أن التطبيق $f: E \to F$ متقابل إذا وفقط إذا وجد تطبيق $g: F \to E$ بحيث:

$$g \circ f = id_E \quad \text{و} \quad f \circ g = id_F$$