باب 2

المجموعات و العلاقات

1.2 المجموعات

1.1.2 تعاريف

تعريف 1.2: المجموعة

المجموعة هي تجمّع من العناصر يُطلق عليها اسم العناصر المكوِّنة للمجموعة. يمكن أن يكون العنصر تقريبًا أي شيء، مثل الأعداد أو الدوال أو المستقيمات. تُعدّ المجموعة كائنًا واحدًا يمكن أن يحتوي على العديد من العناصر. وبما أنّ العناصر هي التي تميّز مجموعة عن أخرى، فإن إحدى الطرق المستخدمة لكتابة مجموعة هي سرد عناصرها ووضعها بين أقواس معقوفة. تُسمّى هذه الطريقة طريقة السرد (Roster Method).
على سبيل المثال، مجموعة جميع الأعداد الصحيحة بين 1 و10 (شاملة) هي:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ويُقرأ هذا على النحو الآتي: «المجموعة التي تحتوي على العناصر 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، و10».
أما مجموعة جميع الأعداد الصحيحة بين 1 و10 (غير شاملة) فهي:

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

إذا كانت A مجموعة وكان a عنصرًا من عناصرها، فإننا نكتب:

$$a \in A$$

وترميز $a, b \in A$ يعني أن $a \in A$ و$b \in A$.

أما إذا لم يكن c عنصراً من عناصر A، فنكتب:

$$c \notin A$$

ويمكن أيضًا تعريف المجموعات بطريقة أخرى: كمجموعة من العناصر التي تحقق خاصية معيّنة.
فنكتب مثلاً:

$$E = \{x \mid P(x)\}$$

أي أنّ E هي مجموعة العناصر x التي تحقق الخاصية $P(x)$. على سبيل المثال:

$$E = \{-1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

تعريف 2.2: مفاهيم أساسية حول المجموعات

1. نرمز بالرمز $\varnothing$ إلى المجموعة الخالية، وهي التي لا تحتوي على أي عنصر.

2. المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد تُسمّى مفردة (Singleton).

3. المجموعة التي تحتوي على عنصرين متميزين تُسمّى زوجية (Pair).

4. عدد عناصر المجموعة E، والذي نرمز له بـ $\text{card}(E) = |E|$، هو عدد العناصر (المنتهية أو غير المنتهية) التي تتكوّن منها المجموعة E.

5. لتكن A وB مجموعتين. نقول إنهما متساويتان إذا احتوتا على نفس العناصر تمامًا، ويرمز لذلك بـ:

$$A = B$$

وهذا يعني أنه إذا كان عنصر ما ينتمي إلى A، فإنه يجب أن ينتمي أيضًا إلى B، وبالعكس، إذا كان عنصر ما ينتمي إلى B، فإنه يجب أن ينتمي أيضًا إلى A.
بصيغةٍ رسمية:

$$A = B \ \text{إذا وفقط إذا} \ (\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

تعريف 3.2: الاحتواء

إذا كانت A وB مجموعتين، فإننا نقول إن A محتواة في B (أو أن A مجموعة جزئية من B) إذا كان كل عنصر من عناصر A هو أيضًا عنصر من عناصر B. ويرمز لذلك بالصيغة:

$$A \subseteq B$$

إذا كانت A مجموعة جزئية من B ولكنها ليست مساوية لها (أي أن A تحتوي على عددٍ أقل من العناصر مقارنةً بـ B)، فإننا نقول إن A مجموعة جزئية حقيقية من B، ويرمز لذلك بـ:

$$A \subset B$$

وبعبارةٍ أخرى:

- $A \subseteq B$ تعني أن جميع عناصر A تنتمي إلى B.
- $A \subset B$ تعني أن جميع عناصر A تنتمي إلى B، و$A \neq B$.

ملاحظة 1.2: خواص علاقة الاحتواء

لدينا دائمًا ما يلي:

1. $E \subseteq E$ (خاصية الانعكاسية Reflexivity).
2. إذا كانت $F \subseteq E$ و$G \subseteq F$، فإن $G \subseteq E$ (خاصية التعدي Transitivity).
3. $F = E$ إذا وفقط إذا $(E \subseteq F)$ و$(F \subseteq E)$ (خاصية اللاتناظر Antisymmetry).

تعريف 4.2: المتممة (Complement)

متممة مجموعة F بالنسبة لمجموعة شاملة E هي مجموعة كل العناصر الموجودة في E والتي لا تنتمي إلى F. ويرمز له بـ F^c أو $\overline{F}$.

$$F^c = \{x \in E \mid x \notin F\}$$

نظرية 1.2: خواص المتممة

لدينا دائمًا ما يلي

1. $(F^c)^c = F$
2. إذا كانت $F \subseteq G$، فإن $G^c \subseteq F^c$

2.1.2 عمليات على المجموعات

تعريف 5.2: التقاطع

تقاطع مجموعتين E وF هو المجموعة $E \cap F$ التي تحتوي على جميع العناصر x المنتمية في الوقت نفسه إلى E وF. نقول إن المجموعتين E وF منفصلتان إذا كان:

$$E \cap F = \varnothing$$

ويُكتب تعريف التقاطع على النحو الآتي:

$$E \cap F = \{\, x \mid x \in E \text{ و } x \in F \,\}$$

نظرية 2.2: خواص التقاطع

لدينا دائمًا ما يلي:

1. $E \cap F = F \cap E$ (خاصية الإبدال Commutativity).
2. $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ (خاصية التجميع Associativity).
3. $E \subseteq F \cap G$ إذا وفقط إذا $(E \subseteq F)$ و$(E \subseteq G)$.

تعريف 6.2: الاتحاد

اتحاد مجموعتين E وF هو المجموعة $E \cup F$ التي تحتوي على جميع العناصر x التي تنتمي إلى E أو إلى F أو إلى كليهما معًا.
ويُكتب ذلك على النحو الآتي:

$$E \cup F = \{ x \mid x \in E \text{ أو } x \in F \} \tag{3.2}$$

مثال 1.2: مثال

لننظر في المجموعتين التاليتين:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad F = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

التقاطع:

$$E \cap F = \{4, 5\}$$

الاتحاد:

$$E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

نظرية 3.2: خواص الاتحاد والتقاطع (قوانين دي مورغان)

لدينا دائمًا ما يلي:

1. $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$
2. $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$

تعريف 7.2: اتحاد وتقاطع عائلة منتهية من المجموعات

لتكن $(A_i)_{i=1}^{n}$ عائلة منتهية من المجموعات.

1. **الاتحاد:** هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي على الأقل إلى مجموعة واحدة من العائلة:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\, x \mid \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ بحيث } x \in A_i \,\}.$$

2. **التقاطع:** هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى جميع مجموعات العائلة:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\, x \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ فإن } x \in A_i \,\}.$$

مثال 2.2: اتحاد وتقاطع عائلة منتهية

لتكن:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{3, 4\}, \quad A_3 = \{3, 5\}.$$

فنحصل على:

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \bigcap_{i=1}^{3} A_i = \{3\}.$$

تعريف 8.2: الطرح والفرق التناظري بين المجموعات

إذا كانت E وF مجموعتين، فإن الفرق بينهما $F \setminus E$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى E ولا تنتمي إلى F.

أما الفرق المتماثل بين المجموعتين E وF، فيُعرَّف بالعلاقة:

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

مثال 3.2: مثال

لننظر في المجموعتين التاليتين:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad F = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

نريد إيجاد المجموعات $E \setminus F$، و$F \setminus E$، و$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

الحسابات:

$$E \setminus F = \{1, 2, 3\}$$
$$F \setminus E = \{6, 7, 8\}$$
$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

تعريف 9.2: مجموعة أجزاء مجموعة

لتكن E مجموعة ما. تُسمّى مجموعة الأجزاء أو مجموعة جميع المجموعات الجزئية لـ E بـ المجموعة القوى (Power Set)، ويرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$.

وتُعرَّف كما يلي:

$$\mathcal{P}(E) = \{\, A \mid A \subseteq E \,\}$$

أي أن $\mathcal{P}(E)$ هي مجموعة كل المجموعات A التي تكون محتواة في E.

إذا كان E يحتوي على n عناصر، فإن عدد عناصر $\mathcal{P}(E)$ هو:

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^n$$

تعريف 10.2: تجزئة مجموعة

يُقال إن $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ هو تجزئة للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

1. لكل i، يكون $A_i \neq \varnothing$ (أي لا توجد مجموعة خالية ضمن التجزئة).
2. لكل $i \neq j$، يكون $A_i \cap A_j = \varnothing$ (أي المجموعات المكونة للتجزئة غير متقاطعة).
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ (أي أن اتحاد جميع المجموعات المكونة للتجزئة يساوي E).

مثال 4.2: مثال

لنعتبر المجموعة:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ولتكن المجموعات الجزئية التالية:

$$A_1 = \{1, 2\}, \quad A_2 = \{3, 4\}, \quad A_3 = \{5, 6\}$$

نلاحظ أن:

- كل مجموعة A_i غير خالية.
- المجموعات A_1, A_2, A_3 غير متقاطعة أي $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $i \neq j$.
- اتحادها يعطي المجموعة الأصلية:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$$

إذن، $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ هو تجزئة للمجموعة E.

تعريف 2.11: الجداء الديكارتي

يُعرَّف **الجداء الديكارتي** لمجموعتين E وF على أنه مجموعة الأزواج المرتّبة التي يكون فيها العنصر الأول من E والعنصر الثاني من F، أي:

$$E \times F = \{\, (x, y) \mid x \in E \text{ و } y \in F \,\}.$$

كما تُعرَّف **قطر المجموعة** E بالصيغة:

$$\Delta = \{\, (x, x) \mid x \in E \,\} \subset E \times E.$$

مثال 2.5: الجداء الديكارتي

لتكن:

$$E = \{1, 2\}, \quad F = \{a, b\}.$$

لحساب $E \times F$، نقوم بإنشاء جميع الأزواج المرتّبة الممكنة بحيث يكون العنصر الأول من E والثاني من F:

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

تعريف 12.2: الجداء الديكارتي لعائلة منتهية من المجموعات

لتكن $(E_i)_{i=1}^{n}$ عائلة منتهية من المجموعات.
يُعرَّف **الجداء الديكارتي** لهذه العائلة على أنه مجموعة جميع n-تُراتب $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بحيث يكون كل عنصر x_i منتمياً إلى المجموعة E_i، أي:

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i \text{ لكل } i = 1, 2, \ldots, n \,\}.$$

عندما تكون جميع المجموعات متساوية $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$، نكتب ببساطة:

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{مرات}}.$$

مثال 6.2: الجداء الديكارتي لعائلة منتهية من المجموعات

لتكن العائلة التالية من المجموعات:

$$E_1 = \{1, 2\}, \quad E_2 = \{a, b\}, \quad E_3 = \{x, y\}.$$

الجداء الديكارتي لهذه العائلة هو:

$$\prod_{i=1}^{3} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2,\ x_3 \in E_3\}.$$

وبالتفصيل نحصل على:

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(1, a, x), (1, a, y), (1, b, x), (1, b, y),$$
$$(2, a, x), (2, a, y), (2, b, x), (2, b, y)\}.$$

2.2 العلاقات

1.2.2 تعاريف

تعريف 13.2: العلاقة بين مجموعتين

العلاقة بين مجموعتين A و B هي قاعدة ارتباط تربط بين عناصر المجموعتين، بحيث يمكن لبعض عناصر A أن ترتبط بعناصر من B. تمثل العلاقة R من A إلى B بمجموعة من الأزواج المرتبة:

$$R \subseteq A \times B,$$

حيث نقول إن a مرتبط بـ b بواسطة العلاقة R ونكتب:

$$a\,R\,b \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad (a,b) \in R.$$

ملاحظة 2.2: ملاحظات حول العلاقة

1. تُسمّى المجموعة A **مجموعة البدء** (Domain)، والمجموعة B **مجموعة الوصول** (Codomain) للعلاقة R.
2. إذا كان العنصر x مرتبطًا بالعنصر y بواسطة العلاقة R، نكتب:

   $$xRy \quad \text{أو} \quad R(x,y),$$

   أما إذا لم يكن مرتبطًا فنكتب:

   $$x\not{R}y \quad \text{أو} \quad \not{R}(x,y).$$

3. إذا كانت العلاقة معرفة من مجموعة A إلى نفسها، أي $R \subseteq A \times A$، فإنها تُسمّى **علاقة على المجموعة** A.

مثال 7.2: أمثلة عن العلاقات

1. **علاقة بين مجموعتين:** لتكن:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\}.$$

نعرّف العلاقة R من A إلى B بالقاعدة:

$$R = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}.$$

كل عنصر من A مرتبط بعنصر واحد من B.

2. **علاقة على مجموعة:** لتكن المجموعة:

$$E = \{1, 2, 3\}.$$

نعرّف علاقة R على E كما يلي:

$$xRy \iff x < y.$$

أي:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

وهذه العلاقة معرفة على $E \times E$.

تعريف 14.2: بيان العلاقة (Graph of a Relation)

لتكن R علاقة من مجموعة A إلى مجموعة B. يُسمّى **بيان العلاقة** R ويرمز له بـ G_R، المجموعة المعرفة كما يلي:

$$G_R = \{(x, y) \in A \times B \mid xRy\}.$$

وبالتالي يمكن اعتبار العلاقة نفسها هي مخططها:

$$R = G_R.$$

ملاحظة 3.2: تساوي علاقتين

لتكن لدينا علاقتان:

$$R = (A, B, G_R) \quad \text{و} \quad R' = (A', B', G_{R'}).$$

نقول إن العلاقتين R و R' **متساويتان** إذا تحققت الشروط التالية:

$$A = A', \quad B = B', \quad \text{و} \quad G_R = G_{R'}.$$

أي أن لهما نفس **مجموعة البدء**، ونفس **مجموعة الوصول**، ونفس **البيان**.

تعريف 15.2: العلاقة العكسية

لتكن R علاقة من مجموعة A إلى مجموعة B. تُسمّى **العلاقة العكسية** لـR، ويرمز لها بـ R^{-1}، العلاقة من B إلى A المعرفة كما يلي:

$$y\, R^{-1}\, x \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad x\, R\, y.$$

أي أن العلاقة العكسية تتكوّن من جميع الأزواج المرتبة التي يتم فيها تبادل موقعي العناصر في العلاقة الأصلية.

2.2.2 خصائص العلاقة الثنائية على مجموعة

نركّز الآن على العلاقات التي تكون فيها مجموعة البدء هي نفسها مجموعة الوصول. لتكن A مجموعة، ولتكن R علاقةً ثنائية على A.

تعريف 16.2: العلاقة الإنعكاسية

لتكن R علاقة ثنائية على مجموعة A. تُسمّى العلاقة R **انعكاسية** إذا كان كل عنصر من A مرتبطًا بنفسه، أي:

$$\forall x \in A,\ xRx.$$

تعريف 17.2: العلاقة التناظرية

تُسمّى العلاقة R على مجموعة A **تناظرية** إذا تحقق أنه كلما كان العنصر x مرتبطًا بـy، فإن y أيضًا مرتبط بـx، أي:

$$\forall x, y \in A,\ (xRy) \Rightarrow (yRx).$$

تعريف 18.2: العلاقة ضد للتناضرية

تُسمّى العلاقة R على مجموعة A **ضد تناضرية** إذا تحقق أنه كلما كان x مرتبطًا بـy وy مرتبطًا بـx، فإن $x = y$، أي:

$$\forall x, y \in A,\ [(xRy) \text{ و } (yRx)] \Rightarrow (x = y).$$

تعريف 19.2: العلاقة المتعدّية

تُسمّى العلاقة R على مجموعة A **متعدّية** إذا تحقق أنه كلما كان x مرتبطًا بـy وy مرتبطًا بـz، فإن x مرتبط بـz، أي:

$$\forall x, y, z \in A,\ [(xRy) \text{ و } (yRz)] \Rightarrow (xRz).$$

مثال 8.2: أمثلة

1. العلاقة $=$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي انعكاسية، وتناظرية، وضدّ التناظرية، ومتعدّية.
2. العلاقة $\leq$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي انعكاسية، وضدّ التناظرية، ومتعدّية، ولكنها ليست تناظرية.
3. العلاقة $<$ على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي متعدّية وضدّ التناظرية، لكنها ليست انعكاسية ولا تناظرية.

مثال 9.2: أمثلة

1. لتكن $A = B = \mathbb{Z}$ و$G_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2 \text{ يقسم } (a-b)\}$. في هذه الحالة، العلاقة R انعكاسية، وتناظرية، ومتعدّية، ولكنها ليست ضدّ التناظرية.

2. في الفضاء الكوني U، علاقة الاحتواء بين مجموعتين جزئيتين من U، أي $X \subseteq Y$، هي علاقة انعكاسية، ومتعدّية، وضدّ تناظرية، ولكنها ليست تناظرية.

3. لتكن العلاقة R معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يلي: y يقسم $x \iff xRy$. عندها:

(ا) إذا كان $x \in \mathbb{Z}$، فإن x يقسم نفسه (حتى 0 يقسم 0). إذن، لكل $x \in \mathbb{Z}$، لدينا xRx، أي أن R انعكاسية.

(ب) إذا كان $x, y \in \mathbb{Z}$، فإن xRy يعني أن x يقسم y. على سبيل المثال، 1 يقسم 4 لكن 4 لا يقسم 1، وبالتالي R ليست تناظرية.

(ج) إذا كان $x, y \in \mathbb{Z}$، وكان xRy وyRx، فإن هذا يعني أن x يقسم y وy يقسم x، مما يؤدي إلى $y = x$ عادة، لكن مثلًا 1 يقسم -1 و-1 يقسم 1 ومع ذلك $-1 \neq 1$. إذن، R ليست ضدّ التناظرية.

(د) إذا كان $x, y, z \in \mathbb{Z}$، وكان xRy وyRz، فإن x يقسم y وy يقسم z، مما يعني أن x يقسم z. وبالتالي، R متعدّية.

3.2.2 علاقة التكافؤ

تعريف 20.2: العلاقة التكافئية

لتكن R علاقة على مجموعة A.

1. تُسمّى العلاقة R **علاقة تكافؤ** إذا كانت انعكاسية، وتناظرية، ومتعدّية.

2. إذا كانت R علاقة تكافؤ، فإن:

(ا) لكل عنصر $a \in A$، تسمى المجموعة

$$\dot{a} = \{\, x \in A \mid xRa \,\}$$

صنف التكافؤ للعنصر a بالنسبة إلى العلاقة R.

(ب) تسمى المجموعة

$$A/R = \{\, \dot{a} \mid a \in A \,\}$$

مجموعة حاصل القِسمية (أو مجموعة اصناف التكافؤ) الناتجة عن قسمة A بالعلاقة R.

مثال 10.2: أمثلة على علاقات تكافؤ

1. على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، نُعرّف العلاقة R كما يلي:

$$aRb \iff a-b(\text{ يقبل القسمة على العدد } 3\text{ }).$$

أي $a \equiv b \pmod 3$. هذه العلاقة **تكافئية** لأنها انعكاسية وتناظرية ومتعدّية.

أصناف التكافؤ هي:

$$\dot{0} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},$$

$$\dot{1} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$
$$\dot{2} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

ومجموعة حاصل القِسمية:

$$\mathbb{Z}/R = \{\, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2} \,\}.$$

2. على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، نُعرّف العلاقة R كما يلي:

$$xRy \iff |x| = |y|.$$

هذه العلاقة تكافئية أيضًا، لأن كل عدد له نفس القيمة المطلقة مثل نفسه، والمساواة في القيم المطلقة علاقة متناظرة ومتعدّية. أصناف التكافؤ هي الأزواج $\{x, -x\}$ لجميع $x > 0$، بالإضافة إلى الصنف $\dot{0} = \{0\}$.

4.2.2 علاقة الترتيب

تعريف 21.2: علاقة الترتيب

لتكن R علاقة على مجموعة A.

1. تُسمّى العلاقة R **علاقة الترتيب** إذا كانت:
   - انعكاسية: $\forall x \in A,\ xRx,$
   - ضدّ تناظرية: $\forall x, y \in A,\ (xRy \text{ و } yRx) \Rightarrow x = y,$
   - متعدّية: $\forall x, y, z \in A,\ (xRy \text{ و } yRz) \Rightarrow xRz.$
2. إذا كانت R علاقة الترتيب، نرمز لها غالبًا بالرمز $\leq_R$ بدل R.
3. تُسمّى العلاقة $\leq_R$ **ترتيبًا كليًا** إذا تحقق:
$$\forall x, y \in A,\ (x \leq_R y) \text{ أو } (y \leq_R x).$$
4. وتُسمّى العلاقة $\leq_R$ **ترتيبًا جزئيًا** إذا وجد عنصران $x, y \in A$ بحيث:
$$(x \not\leq_R y) \text{ و } (y \not\leq_R x).$$

ملاحظة 4.2: عن قابلية المقارنة

يُقال إن عنصرين x و y من المجموعة A **قابلان للمقارنة** بواسطة العلاقة $\leq_R$، إذا تحقق أحد الشرطين:
$$x \leq_R y \quad \text{أو} \quad y \leq_R x.$$

مثال 11.2: أمثلة على علاقات الترتيب

1. **علاقة ترتيب كلي:** على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، نعرّف العلاقة:
$$x \leq y \iff (y \text{ أصغر من أو يساوي } x.)$$

هذه العلاقة انعكاسية، ضدّ تناظرية، ومتعدّية. كما أن كل عددين صحيحين يمكن مقارنتهما، لذلك فهي علاقة **ترتيب كلي**.

2. **علاقة ترتيب جزئي:** لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة $E = \{1, 2, 3\}$، ونعرّف العلاقة:

$$A \subseteq B \iff A \text{ مجموعة جزئية من } B.$$

هذه العلاقة انعكاسية، ضدّ تناظرية، ومتعدّية، لكن ليست كل مجموعتين قابلتين للمقارنة (مثلاً: $\{1\}$ و$\{2\}$). لذا فهي علاقة **ترتيب جزئي**.

3. **علاقة ترتيب غير كلي:** على $\mathbb{R}^2$، نعرّف العلاقة:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ و } y_1 \leq y_2.$$

هي أيضًا انعكاسية، ضدّ تناظرية، ومتعدّية، لكن لا يمكن مقارنة كل زوجين من العناصر (مثل $(1, 5)$ و$(2, 3)$). إذن فهي تمثل **ترتيبًا جزئيًا** في $\mathbb{R}^2$.

تعريف 22.2: العناصر الخاصة

لتكن $\leq_R$ علاقة ترتيب على مجموعة E، وليكن $A \subseteq E$.

1. يقال إن $m \in E$ هو **أصغر عنصر (minimum)** للمجموعة A إذا تحقق:
   (ا) $m \in A$،
   (ب) ولكل $x \in A$ لدينا $m \leq_R x$.
2. يقال إن $M \in E$ هو **أكبر عنصر (maximum)** للمجموعة A إذا تحقق:
   (ا) $M \in A$،
   (ب) ولكل $x \in A$ لدينا $x \leq_R M$.
3. يسمى كل من الأصغر أو الأكبر **عنصرًا متطرفًا (extremum)**.
4. يقال إن $u \in E$ هو **حد سفلي (lower bound)** للمجموعة A إذا تحقق:

$$\forall x \in A : u \leq_R x.$$

5. يقال إن $U \in E$ هو **حد علوي (upper bound)** للمجموعة A إذا تحقق:

$$\forall x \in A : x \leq_R U.$$

6. نقول إن A **محدودة من الأسفل** إذا كان لها حد سفلي في E، و**محدودة من الأعلى** إذا كان لها حد علوي في E، و**محدودة** إذا كانت لها حدود من الأعلى والأسفل معًا.

7. يقال إن $v \in E$ هو **أكبر حد سفلي (infimum)** للمجموعة A إذا:

   (ا) v حد سفلي لـ A،

   (ب) ولكل حد سفلي v_0 لـ A، لدينا $v_0 \leq_R v$.

   نرمز له بـ:

$$v = \inf(A).$$

8. يقال إن $V \in E$ هو **أصغر حد علوي (supremum)** للمجموعة A إذا:

   (ا) V حد علوي لـ A،

   (ب) ولكل حد علوي V_0 لـ A، لدينا $V \leq_R V_0$.

   نرمز له بـ:

$$V = \sup(A).$$

3.2 تمارين

تمرين 1.2: تمارين على العلاقات المجموعية

لتكن $E = \{a, b, c\}$ مجموعة. هل يمكننا كتابة:

1. $a \in E$
2. $a \subset E$
3. $\{a\} \subset E$
4. $\emptyset \in E$
5. $\emptyset \subset E$
6. $\{\emptyset\} \subset E$

تمرين 2.2: تمارين على العمليات المجموعية

لتكن المجموعات التالية:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

أوجد المجموعات التالية:

1. $A \cup B$
2. $B \cap C$
3. $A - B$
4. $A \Delta C$

تمرين 3.2

لتكن A, B مجموعتين. أُثبت أن:

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \quad \text{و} \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

تمرين 4.2

أُثبت بواسطة البرهان بالخلف (المقابلة) العبارات التالية، حيث E مجموعة:

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$،
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ (A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

تمرين 5.2

لتكن A, B و C مجموعات جزئية من E. بسط التعابير التالية:

(ا) $A \cap (A \cup B)$

(ب) $A \cup (A \cap B)$

(ج) $[A \cup (A \cap B)] \cap B$

(د) $(A \cup B) \cap (B \cap C) \cap (C \cup A)$

(ه) $A \cap (\overline{A} \cup B)$

(و) $A \cap B \cap (B \cup \overline{C})$

(ز) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

(ح) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

(ط) $(A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})$

(ي) $(A \Delta B) \cup (A \Delta \overline{B})$

(يا) $A \cup ([B \cap (A \cup B)] \cap [A \cup (A \cap B)])$

(يب) $[(A \cap B) \cap (A \cap \overline{C})] \cup A$

تمرين 6.2

لتكن $E = \{a, b, c, d\}$.

1. أوجد مجموعة أجزاء $P(E)$ للمجموعة E، وهي مجموعة كل المجموعات الجزئية لـ E.

2. أعط مثالاً على تجزئة (partition) للمجموعة E، وهي مجموعة من المجموعات الجزئية غير الخالية المنفصلة زوجياً التي اتحادها يساوي E.

تمرين 7.2

حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية، تناظرية، ضد تناضرية، ومتعدية:

(1) $E = \mathbb{Z}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

(2) $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy > 0$.

(3) $E = \mathbb{Z}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ زوجي.

حدد من بين الأمثلة أعلاه أي العلاقات تكون علاقات ترتيب وأيها علاقات تكافؤ.

تمرين 8.2

حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية، متناظرة، متناظرة ضدياً، ومتعدية:

(1) $E = \mathbb{R}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$.

(2) $E = \mathbb{R}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$.

(3) $E = \mathbb{N}$ و $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1$ بحيث $y = px^q$ (حيث p و q عددان صحيحان).

حدد من بين الأمثلة أعلاه أي العلاقات تكون علاقات ترتيب وأيها علاقات تكافؤ.

تمرين 9.2

لتكن $E = \mathbb{Z}$، مجموعة الأعداد الصحيحة. النظر في العلاقات التالية على E:

(1) العلاقة $\sim_1$ المعرفة بـ $y \sim_1 x$ إذا وفقط إذا كان $x + y$ زوجياً.

(2) العلاقة $\sim_2$ المعرفة بـ $y \sim_2 x$ إذا وفقط إذا كان لـ x و y نفس الباقي عند القسمة على 5.

(3) العلاقة $\sim_3$ المعرفة بـ $y \sim_3 x$ إذا وفقط إذا كان $x - y$ مضاعفًا للعدد 7.

لكل علاقة $\sim_i$ (حيث $i = 1, 2, 3$):

1. حدد ما إذا كانت $\sim_i$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$. اشرح لماذا أو لماذا لا.

2. إذا كانت $\sim_i$ علاقة تكافؤ، فحدد أصناف التكافؤ لـ $\mathbb{Z}$ تحت $\sim_i$.

تمرين 10.2

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية E. أثبت أن:

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff \dot{x} = \dot{y}$$

حيث $\dot{x}$ و $\dot{y}$ يمثلان أصناف التكافؤ للعنصر x والعنصر y على التوالي.

تمرين 11.2

لنرمز بـ $\mathbb{N}^*$ لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ على $\mathbb{N}^*$ بـ $x\mathcal{R}y$ إذا وفقط إذا كان x يقسم y.

(1) أثبت أن $\mathcal{R}$ هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{N}^*$.

(2) هل $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب كلي؟

(3) صف المجموعتين $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x\mathcal{R}5\}$ و $\{x \in \mathbb{N}^* \mid 5\mathcal{R}x\}$.

(4) هل لـ $\mathbb{N}^*$ أصغر عنصر؟ أكبر عنصر؟