باب 1

مفاهيم المنطق

في هذا الفصل، سنقتصر على تقديم العناصر الأولى من المنطق الكلاسيكي، مما يمهّد الطريق لاستكشاف أعمق لهذا الحقل الأساسي. يُعرّف المنطق على أنه دراسة الحجج، أي عملية التفكير التي نستنتج من خلالها استنتاجات من مقدمات. في جوهره، يسعى المنطق إلى توفير إطار منظم للتمييز بين التفكير الصحيح وغير الصحيح. بعبارة أخرى، يحاول المنطق تقنين الوسائل المشروعة التي يمكن بها استخلاص استنتاجات من معلومات معينة.

1.1 القضايا (Propositions)

لدراسة الحجج، يجب أولاً دراسة الجمل، لأنها تُعد المكونات الأساسية للحجج.

تعريف 1.1: القضية proposition

القضية هي جملة إما صحيحة أو خاطئة.

مع ذلك، ليست كل الجمل تُعتبر قضايا. فالأسئلة، والتعجبات، والأوامر، والجمل المتناقضة ذاتياً — مثل الأمثلة الآتية — لا يمكن إثباتها أو نفيها.

مثال 1.1

1. هل الرياضيات منطق؟
2. مرحباً!

3. لا تفزع.
4. هذه الجملة خاطئة.

يُرمز إلى القضايا عادةً باستخدام أحرف لاتينية كبيرة مثل P، Q، R، ...
إذا كانت القضية صحيحة، نُعطيها القيمة 1 (أو T)، وإذا كانت خاطئة، نُعطيها القيمة 0 (أو F).

P
1
0

جدول 1.1: جدول الصدق لقضية P

تعريف 2.1:

هناك نوعان من القضايا:
♦ القضية الذرية هي قضية لا تتكوّن من قضايا أخرى.
♦ القضية المركبة هي قضية ليست ذرية، بل تتكوّن من قضايا أخرى.

مثال 2.1

1. "الجزائر هي عاصمة الجزائر" — قضية صحيحة.
2. "16 من مضاعفات 2" — قضية صحيحة.
3. "19 من مضاعفات 2" — قضية خاطئة.

2.1 حساب القضايا (The Propositional Calculus)

يمكن دمج القضايا بطرق مختلفة لتكوين قضايا أكثر تعقيدًا. هناك خمسة أنواع أساسية من هذا التركيب.

تعريف 3.1: النفي A negation

في قضية معينة P هو قضية نرمز لها بـ $\bar{P}$ (أي "not P")، بحيث إذا كانت P صحيحة فإن $\bar{P}$ تكون خاطئة، وإذا كانت P خاطئة فإن $\bar{P}$ تكون صحيحة.

مثال 3.1:

1. نفي العبارة $3+8=5$ هو $3+8\neq 5$. في هذه الحالة نقول إنه تم نفي العبارة.
2. نفي القضية **"الدالة الجيبية (sine) دورية"** يعطي القضية **"الدالة الجيبية ليست دورية"**.
3. نفي العبارة "العدد 5 زوجي" هو "العدد 5 ليس زوجياً".

$\bar{P}$	P
0	1
1	0

جدول 2.1: جدول صدق القضية $\bar{P}$

تعريف 4.1: الوصل Conjunction

لوصل (Conjunction) هو قضية مركبة تتكون من اتحاد قضيتين (تسمى جزأي الوصل) باستخدام أداة الربط "و". يُرمز للوصل بين القضيتين A و B بـ $(A\wedge B)$ وله جدول الصدق التالي:
تكون $A\wedge B$ صحيحة إذا وفقط إذا كانت كل من A و B صحيحتين.
تسمى A و B جزأي الوصل (Conjuncts) في العبارة $A\wedge B$.

مثال 4.1:

1. لنفرض:
P_1 : الجو مشمس اليوم.
P_2 : درجة الحرارة دافئة.

$P \wedge Q$	Q	P
1	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

جدول 3.1: جدول صدق العبارة $P \wedge Q$

فإن وصل هاتين القضيتين هو: $P_1 \wedge P_2$: الجو مشمس اليوم ودرجة الحرارة دافئة.

2. لنفرض:
Q_1: السيارة حمراء.
Q_2: السيارة مزودة بعجلات سبائكية.
فإن وصل هاتين القضيتين هو:
$Q_1 \wedge Q_2$:السيارة حمراء ومزودة بعجلات سبائكية.

في اللغات الطبيعية، هناك استعمالان مختلفان لأداة "أو": الشامل (inclusive) والحصري (exclusive). وفقًا للاستعمال الشامل، فإن B أو A تعني: "إما A، أو B، أو كلاهما". أما وفقًا للاستعمال الحصري، فالمعنى هو: "إما A أو B، ولكن ليس كلاهما".

لتمثيل أداة الربط الشاملة، سنقدم رمزًا خاصًا هو: $\vee$.

تعريف 5.1: الفصل Disjunction

الفصل هو قضية مركبة تتكوّن من ربط قضيتين (تسمى مفصولات) باستخدام أداة "أو".
تكون $A \vee B$ خاطئة إذا وفقط إذا كانت كل من A و B خاطئتين.
تُسمى $A \vee B$ فصلًا، وتُسمى A و B مفصولات (Disjuncts).
جدول الصدق للعبارة $A \vee B$ كما يلي:

$A \vee B$	B	A
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	0	0

جدول 4.1: جدول صدق القضية $A \vee B$

مثال 5.1:

1. لنفرض:

P_1 : إنهُ يُمطر.
P_2 : الجو عاصف.

فإن فصل هاتين القضيتين هو:

$P_1 \vee P_2$: إما أنه يُمطر أو أن الجو عاصف.

2. لنفرض:

Q_1 : درجة الحرارة فوق 25 مئوية.
Q_2 : مستوى الرطوبة مرتفع.

فإن فصل هاتين القضيتين هو:

$Q_1 \vee Q_2$: درجة الحرارة فوق 25 مئوية أو مستوى الرطوبة مرتفع.

3. "العدد 10 من مضاعفات 2" هي عبارة صحيحة، و"العدد 10 من مضاعفات 3" هي عبارة خاطئة. إذن، $Q \wedge P$ عبارة خاطئة، بينما $Q \vee P$ عبارة صحيحة.

يُطلق على العبارة من الصيغة ``إذا كان $P$، فإن $Q$" اسم **العبارة الشرطية**. تُسمى العبارة ``P" **المقدَّم** أو **الفرضية**، وتُسمى العبارة ``$Q$" **التالي** أو **الاستنتاج**. يمكن أيضًا التعبير عن ``إذا كان P، فإن Q" بالقول إن Q **شرط لازم** لـ P. وطريقة أخرى للتعبير عنها هي القول إن P **شرط كاف** لـ Q.

تعريف 6.1: الاستلزام والتكافؤ Implication, Equivalence

لنفرض أن P و Q عبارتان منطقيتان.

1. العبارة من الشكل $P \Rightarrow Q$ (تُقرأ: "P تستلزم Q") تُسمى **شرطية (Implication)**.
العبارة $P \Rightarrow Q$ مكافئة منطقياً للعبارة: "إذا كانت P صحيحة، فإن Q صحيحة". تُسمى P المقدّمة (أو الفرضية)، وتُسمى Q النتيجة.

   رياضياً، جدول الصدق للعبارة $P \Rightarrow Q$ كما هو موضّح في الجدول 5.1:

2. العبارة من الشكل "P إذا وفقط إذا Q" (ويرمز لها بـ $P \iff Q$) تُسمى **تكافؤاً (Equivalence)**. العبارة $P \iff Q$ مكافئة منطقياً للعبارة: "$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$"، أي أن P تستلزم Q و Q تستلزم P.

   العبارة $P \iff Q$ تكون صحيحة إذا كانت كل من P و Q صحيحتين أو خاطئتين معاً، وتكون خاطئة في باقي الحالات.

   رياضياً، جدول الصدق للعبارة $P \iff Q$ كما هو موضّح في الجدول 6.1:

$P \Longrightarrow Q$	Q	P
1	1	1
0	0	1
1	1	0
1	0	0

جدول 5.1: جدول صدق العبارة $P \Longrightarrow Q$

$P \Leftrightarrow Q$	Q	P
1	1	1
0	1	0
0	0	1
1	0	0

جدول 6.1: جدول صدق العبارة $P \Leftrightarrow Q$

ملاحظة 1.1:

1. في الممارسة العملية، إذا كانت P و Q و R ثلاث عبارات منطقية، فإن العبارة المركبة $(Q \Rightarrow P$ و $R \Rightarrow Q)$ تُكتب بشكل مختصر هكذا: $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R)$.

   وبالمثل، فإن العبارة المركبة $(Q \Leftrightarrow P$ و $R \Leftrightarrow Q)$ تُكتب بشكل مختصر هكذا: $(P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R)$.

2. تُسمى العبارة $Q \Rightarrow P$ المعكوس (Converse) للعبارة $P \Rightarrow Q$.

1.2.1 الخصائص

تعريف 7.1:

لنفرض أن P و Q عبارتان منطقيتان (بسيطتان أو مركبتان).

1. إذا كانت P صحيحة عندما تكون Q صحيحة، وكانت P خاطئة عندما تكون Q خاطئة، فإننا نقول إن P و Q لهما نفس جدول الصدق، أو أنهما **متكافئتان منطقياً**، ونرمز إلى ذلك بـ $P \Leftrightarrow Q$.

2. في الحالة المعاكسة، نكتب $P \not\Leftrightarrow Q$ للدلالة على أنهما **غير متكافئتين منطقياً**.

مثال 6.1:

لنفرض أن P و Q و R ثلاث عبارات منطقية، فإن:

1. $P \Leftrightarrow \bar{\bar{P}}$.
2. $P \Leftrightarrow (P \wedge P)$، وبالمثل $P \Leftrightarrow (P \vee P)$.
3. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$، $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
4. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$، $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
5. $P \wedge (Q \vee P) \Leftrightarrow P$.
6. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$.

7. $P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$، $P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee R)$.

8. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$، $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

9. العبارة المركبة $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ صحيحة بغض النظر عن قيم الصدق لـ P و Q و R.

10. العبارة المركبة $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ صحيحة بغض النظر عن قيم الصدق لـ P و Q و R.

11. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

12. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.

13. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

14. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

3.1 المكممات المنطقية (Mathematical Quantifiers)

تعريف 8.1:

ليكن E مجموعة. **الجملة المفتوحة (Predicate)** على E أهي جملة تحتوي على متغير، بحيث إذا تم تعويض المتغير بعنصر من E، نحصل على قضية.

نرمز للجملة المفتوحة التي تحتوي على المتغير x بالرمز $P(x)$.

مثال 7.1:

العبارة $P(n)$ المعرفة بـ " n من مضاعفات 2" هي جملة مفتوحة (Predicate) على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. تصبح هذه العبارة قضية (Proposition) عندما نُعوض n بعدد صحيح معيّن. على سبيل المثال:

1. القضية $P(10)$ المعرفة بـ "10 من مضاعفات 2"، الناتجة عن تعويض n بالعدد 10، هي عبارة صحيحة؛

2. القضية $P(11)$ المعرفة بـ "11 من مضاعفات 2"، الناتجة عن تعويض n بالعدد 11، هي عبارة خاطئة.

انطلاقًا من جملة مفتوحة $P(x)$ معرفة على مجموعة E، يمكننا إنشاء قضايا جديدة تُسمى **قضايا مكممة (Quantified Propositions)** باستخدام الكميتين: "يوجد ($\exists$)" و"لكل ($\forall$)".

تعريف 9.1:

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة معرفة على مجموعة E.

1. **(المكمم الكوني** (Universal Quantifier)) الكمّ "لكل" (ويُقال أيضًا "لكل عنصر") يُرمز له بالرمز $\forall$، ويُستخدم لتعريف القضية المكمّاة "$\forall x \in E,\ P(x)$"، وهي صحيحة إذا كانت $P(x)$ صحيحة لكل عنصر x من E.

2. **(المكمم الوجودي** (Existential Quantifier)) الكمّ "يوجد على الاقل" يُرمز له بالرمز $\exists$، ويُستخدم لتعريف القضية المكمّاة "$\exists x \in E,\ P(x)$"، وهي صحيحة إذا وُجد عنصر واحد على الأقل $x \in E$ يحقق العبارة $P(x)$.

مثال 8.1:

1. العبارة "$x^2 + 2x - 3 \leq 0$" هي جملة مفتوحة معرفة على $\mathbb{R}$. وقد تكون صحيحة أو خاطئة حسب قيمة x.

   القضية المكمّاة "$\forall x \in [-3, 1],\ x^2 + 2x - 3 \leq 0$" هي قضية منطقية مكمّاة. وهي صحيحة لأن المقدار $x^2 + 2x - 3$ يكون سالبًا أو يساوي الصفر لكل x ينتمي إلى ال المجال المغلق $[-3, 1]$.

2. القضية المكمّاة "$\forall x \in \mathbb{N},\ (n-3)n > 0$" هي قضية خاطئة، لأنه يوجد عنصر n في $\mathbb{N}$ (مثل $n = 0$، أو $n = 1$، أو $n = 2$، أو $n = 3$) لا تحقق العبارة "$(n-3)n > 0$".

3. القضية المكمّاة "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$" هي قضية صحيحة، لأنه يوجد (على الأقل) عدد حقيقي واحد يحقق $x^2 = 4$، وهو العددان -2 و2.

1.3.1 قواعد نفي القضايا المكمّاة

1. نفي العبارة «لكل عنصر x في E، تكون $P(x)$ صحيحة» هو: «يوجد عنصر x في E بحيث تكون $P(x)$ خاطئة».

$$\overline{(\forall x \in E, \quad P(x))} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E, \quad \overline{P(x)})$$

2. نفي العبارة «يوجد عنصر x في E بحيث تكون $P(x)$ صحيحة» هو: «لكل عنصر x في E، تكون $P(x)$ خاطئة».

$$\overline{(\exists x \in E, \quad P(x))} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, \quad \overline{P(x)})$$

مثال 9.1:

1. نفي العبارة:

$$(\forall x \in [0, +\infty[, \quad (x^2 \geq 1))$$

هو:

$$(\exists x \in [0, +\infty[, \quad (x^2 < 1)).$$

2. نفي العبارة:

$$(\exists z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 = 0)$$

هو:

$$(\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 \neq 0).$$

3. ليس من الصعب كتابة نفي العبارات المركبة. فمثلاً، نأخذ القضية:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10),$$

فنفيها هو:

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

ملاحظة 2.1:

ترتيب المكممات مهم جدًا. على سبيل المثال، الجملتان المنطقيتان:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10) \quad \text{و} \quad \exists y > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x + y > 10)$$

ليستا متماثلتين في المعنى. الأولى صحيحة، لأنها تعني: "لكل عدد حقيقي x، يمكننا إيجاد عدد موجب y بحيث $x+y>10$"، وهو أمر ممكن دائمًا.
أما الثانية، فهي خاطئة، لأنها تعني: "يوجد عدد موجب y واحد يحقق $x+y>10$ لكل $x\in\mathbb{R}$"، وهو مستحيل (مثلاً إذا أخذنا $x=100$ و $y=1$، فإن $x+y=101>10$، لكن إذا أخذنا $x=-100$ فإن $x+y=-99<10$).

4.1 طرق الإثبات

الهدف من منطق القضايا في الفصل الأول هو نمذجة أنماط التفكير الأساسية التي تُستخدم في الرياضيات. فيما يلي بعض الطرق الكلاسيكية في الاستدلال المنطقي.

1.4.1 Proofs Universal

تهدف أولى براهيننا إلى إثبات العبارات التي تحتوي على الكمية العامة (المعبر عنها بـ $\forall$). لإثبات العبارة $\forall x\in E,\ P(x)$ (والتي تعني أن $P(x)$ صحيحة لكل x من الفضاء E) انطلاقاً من مجموعة من الفرضيات، نقوم بإثبات أن كل عنصر x يحقق الخاصية $P(x)$، بافتراض تلك الفرضيات. نتبع لهذا الغرض المخطط التالي:

$$\text{universe the in object an be a Let}E \longrightarrow \text{Prove}P(a).$$

مثال 10.1: إثبات نشر مكعب الفرق

لإثبات أن:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$$

نقوم باختيار عدد حقيقي كيفي ثم نتحقق من صحة العلاقة.

Proof

ليكن $a\in\mathbb{R}$. فإن

$$\begin{aligned}(a-1)^3 &= (a-1)(a-1)^2\\ &= (a-1)(a^2-2a+1)\\ &= a^3-3a^2+3a-1.\end{aligned}$$

2.4.1 البراهين الوجودية (Existential Proofs)

لنفترض أننا نريد كتابة برهان من أجل:

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

هذا يعني أنه يجب علينا أن نُظهر أن هناك على الأقل عنصراً واحداً من المجموعة E يُحقق العبارة $P(x)$. وتكون مهمتنا هي إيجاد هذا العنصر.
لإثبات ذلك مباشرةً، نختار عنصراً نعتقد أنه يحقق $P(x)$، ويُسمى هذا العنصر "مرشحًا" (Candidate).
بعد ذلك نتحقق أنه فعلًا يُحقق $P(x)$.
هذا النوع من البراهين يسمى البرهان الوجودي المباشر

3.4.1 الاستدلال المباشر (Direct reasoning)

نريد أن نُبيّن أن العبارة $Q \Rightarrow P$ صحيحة. نفترض أن P صحيحة ثم نبرهن أن Q صحيحة أيضًا باتباع الخطوات التالية:

1. اقترض المُقدِّمة (الشرط).
2. ترجم المقدّمة إلى صيغة مناسبة.
3. ترجم النتيجة بحيث يتضح هدف الإثبات.
4. استنتج النتيجة.

مثال 11.1

نستخدم الإثبات المباشر لكتابة إثبات فقري للعبارة التالية: لكل عدد صحيح x، إذا كان $4 \mid x$، فإن x عدد زوجي.

برهان 1.1

نفترض أن العدد الصحيح a يقبل القسمة على 4، أي أن $a = 4k$ من أجل عدد صحيح ما k. يجب علينا أن نبيّن أن $a = 2l$ من أجل عدد صحيح l. لكن نعلم أن:

$$a = 4k = 2 \cdot (2k).$$

وعليه، نأخذ $l = 2k$، ومنه يكون $a = 2l$، أي أن a عدد زوجي.

4.4.1 الاستدلال بالعكس النقيض (Reasoning by contraposition)

في بعض الأحيان يكون من الصعب إثبات عبارة شرطية بشكل مباشر. البديل هو إثبات العكس النقيض، والذي قد يكون أسهل أو يتطلب عدداً أقل من الخطوات.

يعتمد الاستدلال بالمباينة على التكافؤ التالي:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}). \tag{1}$$

لذلك، إذا أردنا إثبات العبارة $P \Rightarrow Q$، فإننا نبرهن فعلياً أنه إذا كانت $\overline{Q}$ صحيحة، فإن $\overline{P}$ تكون صحيحة أيضاً.

مثال 12.1

نريد أن نبرهن العبارة: لكل عدد صحييح n إذا كان n^2 فردي فإن n فردي.

برهان 2.1

بدلًا من تقديم إثبات مباشر، سنثبت المباينة التالية:
لكل عدد صحييح n إذا كان n زوجي فإنn^2 زوجي.
ليكن n عدداً زوجياً. هذا يعني أن $n = 2k$ من أجل عدد صحيح ما k. ولإثبات أن n^2 عدد زوجي، نحسب:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2),$$

ومن ثمّ، فإن n^2 عدد زوجي.

5.4.1 الإثبات بالتقسيم إلى حالات (Proof by Cases)

لنفترض أننا نريد إثبات $P \Rightarrow Q$، ولكن هذا صعب لسبب ما. نلاحظ مع ذلك أن P يمكن تقسيمها إلى حالات. أي أنه توجد $P_1, P_2, \ldots, P_n$ بحيث أنّ: $P \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$.
فإذا استطعنا إثبات $P_i \Rightarrow Q$ لكل i، نكون قد أثبتنا $P \Rightarrow Q$.

مثال 13.1

أثبت أن: لكل عدد صحيح n، يكون العدد $n^3 - n$ عدداً زوجياً.

برهان 3.1

سنقوم بإثبات هذه العبارة بالتقسيم إلى حالتين: الحالة التي يكون فيها n عددًا زوجيًا، والحالة التي يكون فيها n عددًا فرديًا.

الحالة الأولى: n عدد زوجي

إذا كان n عددًا زوجيًا، فهذا يعني حسب التعريف أن $n = 2k$ حيث k عدد صحيح. وبالتالي:

$$n^3 - n = (2k)^3 - 2k = 8k^3 - 2k = 2(4k^3 - k).$$

وبما أن $2(4k^3 - k)$ قابل للقسمة على 2، فإن $n^3 - n$ عدد زوجي في هذه الحالة.

الحالة الثانية: n عدد فردي

إذا كان n عددًا فرديًا، فهذا يعني حسب التعريف أن $n = 2k+1$ حيث k عدد صحيح. إذًا:

$$n^3 - n = (2k+1)^3 - (2k+1).$$

نحسب أولاً:

$$(2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1.$$

ومن ثم:

$$n^3 - n = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - (2k+1) = 8k^3 + 12k^2 + 4k.$$

نلاحظ أن $8k^3 + 12k^2 + 4k$ قابل للقسمة على 2، وبالتالي فإن $n^3 - n$ عدد زوجي أيضًا في هذه الحالة.

وبما أننا أثبتنا أن $n^3 - n$ عدد زوجي في كلتا الحالتين، نستنتج أن $n^3 - n$ عدد زوجي لأي عدد صحيح n.

6.4.1 البرهان بالمثال المضاد (Counterexample)

لإثبات أن عبارة من الشكل $\forall x \in E,\ P(x)$ صحيحة، يجب أن نبرهن أن $P(x)$ صحيحة لكل $x \in E$.

من جهة أخرى، لإثبات أن هذه العبارة خاطئة يكفي أن نجد عنصرًا $a \in E$ بحيث تكون $P(a)$ خاطئة.

(تذكَّر أن نفي العبارة $\forall x \in E,\ P(x)$ هو $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$).

إيجاد مثل هذا العنصر a يُسمّى إيجاد **مثال مضاد** (Counterexample) للعبارة $\forall x \in E,\ P(x)$.

مثال 14.1:

أثبت أن العبارة: «كل الأعداد الأولية فردية» هي عبارة خاطئة.

برهان 4.1

العبارة «كل الأعداد الأولية فردية» هي عبارة خاطئة. مثال مضاد لهذه العبارة هو العدد 2، إذ إنه عدد أولي وعدد زوجي في نفس الوقت.
- العدد 2 أولي لأنه لا يقبل القسمة إلا على 1 وعلى نفسه. - وبما أن 2 عدد زوجي، فهذا يُناقض العبارة التي تقول إن جميع الأعداد الأولية فردية.

إذن، العبارة «كل الأعداد الأولية فردية» خاطئة، حيث إن العدد 2 يُعتبر مثالًا مضادًا لها.

7.4.1 7.4.1 الإثبات بالتناقض (Proof by Contradiction)

الإثبات بالتناقض، ويُعرف أيضًا بالبرهان بالخُلف، يقوم على إثبات صحة عبارة ما من خلال إظهار أن نفيها يؤدّي إلى تناقض. لاستخدام هذا النوع من البرهان، نتّبع الخطوات التالية:

1. **افتراض النفي:** لنفترض أن العبارة التي نريد إثباتها خاطئة.
2. **تطوير النتائج:** نستنتج التوابع المنطقية لهذا الافتراض.
3. **تحديد التناقض:** نُبيّن أن هذه النتائج تؤدّي إلى تناقض.
4. **الخاتمة:** نستنتج أن الافتراض الأوّل خاطئ، وبالتالي تكون العبارة الأصلية صحيحة.

مثال 15.1

أثبت أنه: لكل عدد صحيح n، إذا كان n^2 عددًا فرديًا، فإن n فردي.

برهان 5.1

لنأخذ عددًا صحيحًا n ولنفترض أن n^2 فردي. من أجل الحصول على تناقض، نفترض أن n زوجي. أي أن $n = 2k$ لعدد صحيح ما k.
بالتعويض نجد:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

وهذا يُظهر أن n^2 عدد زوجي.
وهذا تناقض مع الافتراض بأن n^2 فردي. إذن، لا بد أن n عدد فردي.

8.4.1 الإثبات بالتراجع (Proof by Induction)

الإثبات بالتراجع هو طريقة تُستخدم في الرياضيات لإثبات أن خاصية $P(n)$ صحيحة لكل عدد صحيح n ابتداءً من قيمة أولية n_0. يتكوّن البرهان بالتراجع من خطوتين رئيسيتين:

1. **الخطوة الأولى (حالة الأساس):** التحقق من أن الخاصية $P(n)$ صحيحة للقيمة الابتدائية $n = n_0$.
2. **الخطوة الثانية (خطوة التراجع):** نفترض أن الخاصية صحيحة لعدد صحيح ما k (ويُسمّى هذا الافتراض "فرضية التراجع")، ثم نبرهن أن الخاصية صحيحة أيضًا عند $k + 1$.

مثال 16.1

أثبت أن مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى حتى n يُعطى بالصيغة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

برهان 6.1

الخطوة 1: حالة الأساس
نحتاج أولًا إلى التحقق من صحة الصيغة عند $n = 1$.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

إذن الصيغة صحيحة عند $n = 1$.

الخطوة 2: خطوة التراجع
نفترض أن الصيغة صحيحة عند $n = k$، أي أن:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

هذا الافتراض يُسمّى فرضية التراجع. نريد أن نُبرهن أنه إذا كانت الصيغة صحيحة عند $n = k$، فهي صحيحة أيضًا عند $n = k + 1$.

نعتبر مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى حتى $k + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1).$$

وباستخدام فرضية التراجع يمكننا أن نكتب:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1).$$

نبسّط الطرف الأيمن:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

وهذا يثبت أن الصيغة صحيحة عند $n = k + 1$.

الخطوة 3: الخاتمة

بحسب مبدأ التراجع الرياضي، فإن الصيغة:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}^*$ (أي لكل عدد صحيح موجب).

5.1 تمارين

تمرين 1.1

أيٌّ من الجمل التالية تُعتبر قضايا؟ وما هي قيم الصدق للجمل التي تُعتبر قضايا؟

1. باريس في فرنسا أو مدريد في الصين.
2. افتح الباب.
3. القمر تابع للأرض.
4. $x + 5 = 7$.

5. $9 > x + 5$ لكل عدد حقيقي x.

تمرين 2.1

حدِّد ما إذا كان كل استلزام من الاستلزامات التالية صادقًا أم خاطئًا:

1. إذا كان 0.5 عددًا صحيحًا، فإن $1 + 0.5 = 3$.
2. إذا كان $5 > 2$، فإن القطط تستطيع الطيران.
3. إذا كان $3 \times 5 = 15$، فإن $1 + 2 = 3$.
4. لكل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$، إذا كان $x \leq 0$، فإن $(x - 1) < 0$.

تمرين 3.1

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة. انفِ العبارات التالية:

1. $\exists x \in \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 0.$
2. $\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geq A : f(x) \leq M.$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \ f(x) > 0.$
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ بحيث $\forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$

تمرين 4.1:

نظِر إلى العبارة: «لكل عددين صحيحين a وb، إذا كان $a + b$ زوجياً فإن a و b كلاهما زوجيان»:

1. اكتب المباينة (contrapositive) للعبارة.
2. اكتب المعكوس (converse) للعبارة.
3. اكتب نفي (negation) العبارة.

4. هل العبارة الأصلية صحيحة أم خاطئة؟ برهن إجابتك.
5. هل المباينة للعبارة الأصلية صحيحة أم خاطئة؟ برهن إجابتك.
6. هل المعكوس للعبارة الأصلية صحيح أم خاطئ؟ برهن إجابتك.
7. هل نفي العبارة الأصلية صحيح أم خاطئ؟ برهن إجابتك.

تمرين 5.1: إثبات مباشر

أثبت أنه إذا كان n عددًا صحيحًا زوجيًا، فإن n^2 يكون أيضًا عددًا زوجيًا.

تمرين 6.1: إثبات بالتناقض

أثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

تمرين 7.1: إثبات بالعكس النقيض

1. أثبت أنه إذا كان n^2 عددًا صحيحًا زوجيًا، فإن n يكون أيضًا عددًا زوجيًا.
2. أثبت أنه إذا كان a و b عددين صحيحين وحاصل ضربهما ab فرديًا، فإن كلاً من a و b فرديان.

تمرين 8.1: بالبرهان بالتراجع

1. أثبت أنه لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
2. أثبت أنه لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، $2^n > n$.

تمرين 9.1: إثبات بالحالات

أثبت أنه لكل $x \in \mathbb{R}$، تحقق المتباينة التالية: $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

تمرين 10.1: مثال مضاد

أثبت أن العبارة التالية خاطئة: "كل عدد صحيح موجب هو مجموع ثلاثة مربعات."