باب 2

الهندسة المستوية (الإقليدية

الهندسة الإقليدية (بالإنجليزية: Euclidean geometry) هي نظام رياضياتي يُنسَب إلى إقليدس الإسكندري، التي وضع أسسها في كتابه عن الهندسة: العناصر. طرق إقليدس تتكون من افتراض مجموعة بسيطة من المُسلّمات البدهية، واستنتاج باقي المُبرهنات منها. مع أن النتائج التي توصل لها إقليدس سبقه إليها رياضياتيون قُدماء، إقليدس كان أول من وضع تلك المبرهنات في نظام منطقي مُحكَم. كتاب العناصر يبدأ بالهندسة المُستوية وهي التي لا تزال تُدرّس في المرحلة الثانوية بصفتها أول نظام مُسلّمات وأول الأمثلة على البرهنة الرسمية. الهندسة الإقليدية تشمل أيضاً الهندسة الفراغية ثلاثية الأبعاد. علاوةً على ذلك، كثيرٌ من النتائج في كتاب العناصر تندرج تحت ما يُسمّى حالياً بالجبر ونظرية الأعداد إلا أنّها مشروحة في لغة هندسية.

1.2 مسلمات إقليدس الخمس

تعريف 1.2: المفاهيم الأولية

في الهندسة الإقليدية، هناك ثلاثة مفاهيم أولية لا تُعرَّف ولكنها تُفهم بديهياً:

- **النقطة**: ليس لها طول ولا عرض ولا ارتفاع
- **المستقيم**: له طول ولكن ليس له عرض
- **المستوى**: سطح مستوٍ يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات

الهندسة الإقليدية هي نظام من المُسلّمات تُشتَقُّ من خلاله جميع المبرهنات. إلى حين مجيئ الهنديات اللاإقليدية، كانت هذه المسلمات تُعتَبر صحيحة بَدَهيّاً في العالم الفيزيائي. براهين إقليدس من الاقتراض حتى الاستنتاج بقيت صحيحة بغض النظر عن صحّتها فيزيائيّاً.

منذ بدايات أول كتاب من العناصر، إقليدس أعطى خمس مُسلّمات للهندسة المستوية موصوفة بالنسبة للإنشاءات:

ليكن الآتي مُسلّماً به:

نظرية 1.2: مسلمات إقليدس

هي بديهيات خاصة بالهندسة:

1. يمكن رسم مستقيم من أي نقطة إلى أي نقطة
2. يمكن مد القطعة المستقيمة إلى خط مستقيم
3. يمكن رسم دائرة بأي مركز وأي نصف قطر
4. جميع الزوايا القائمة متساوية
5. **مسلمة التوازي**: إذا تقاطع خط مستقيم مع خطين مستقيمين آخرين مُنشئاً زوايا على الجهة نفسها مجموعها أقل من مجموع زاويتين قائمتين، فإنّ هذين الخطين المستقيمين يلتقيان في الجهة التي تكون فيهما مجموع الزاويتين أقل من زاوية قائمة.

بالنسبة للقدماء، مُسلّمة التوازي بّدت أقلّ بداهةً من الأخريات. كانوا يأملون إنشاء نظام من مُسلّمات قاطعة تماماً. بمنظورهم، ظهرت مسلّمة التوازي وكأنها مُبرهنة تحتاج لبرهان من جُمَل أبسط. بات اليوم معروفاً أن البرهان لذلك مستحيل، لأنه بالإمكان إنشاء أنظمة مُتّسقة من الهندسة التي قد تكون فيها مسلمة التوازي صحيحة وقد تكون خاطئة. إقليدس بنفسه تعامل مع المسلمة بنحوٍ مُختلف عن بقية المسلمات عندما كتب أول 28 مبرهنة دون استعمال مبرهنة التوازي.

كتاب العناصر يتضمن أيضاً «المفاهيم المشتركة» الخمسة. هي حقائق بديهية تنطبق على جميع فروع الرياضيات.

نظرية 2.2: المفاهيم المشتركة

1. الكميات المتساوية لكمية واحدة متساوية فيما بينها
2. إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات متساوية، تكون المجاميع متساوية
3. إذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية، تكون البواقي متساوية
4. الأشياء التي تنطبق مع بعضها تساوي بعضها بعضاً.
5. الكل أكبر من الجزء

2.2 المضلعات و الدائرة

3.2 المضلعات المألوفة

1.3.2 المثلثات

تعريف 2.2: مضلع

المضلع هو شكل مغلق في المستوى يتكون من اتحاد عدد من القطع المستقيمة (تسمى الأضلاع) بحيث:

- لا يقطع أي ضلع الآخر.
- يتقاطع كل ضلعان فقط عند نقطة نهايتهما (تسمى الرأس).

2.3.2 المثلثات

تعريف 3.2: مثلث

المُثَلَّث هو مضلع له ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا وثلاث رؤوس.

نظرية 3.2: خصائص المثلث

للمثلث الخصائص التالية:

1. مجموع زوايا المثلث الداخلية يساوي $180°$
2. مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث
3. الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها

مثال 1.2: أنواع المثلثات

- **مثلث متساوي الأضلاع**: جميع أضلاعه متساوية، جميع زواياه متساوية ($60°$)
- **مثلث متساوي الساقين**: ضلعان متساويان، زاويتان قاعديتان متساويتان
- **مثلث قائم الزاوية**: له زاوية قياسها $90°$

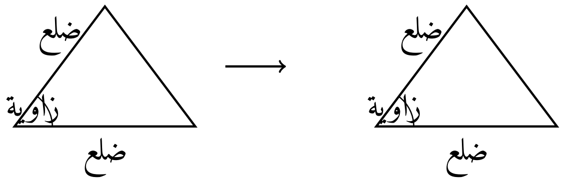
تعريف 4.2: تطابق المثلثات

يقال أن مثلثين متطابقان إذا كان من الممكن جعل أحدهما يطابق الآخر تماماً عن طريق النقل والدوران والانعكاس. ويرمز للتطابق بالرمز $\cong$.

حالات التطابق

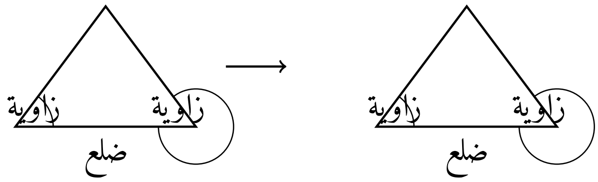
نظرية 4.2: حالة ضلع، زاوية، ضلع (SAS)

إذا تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



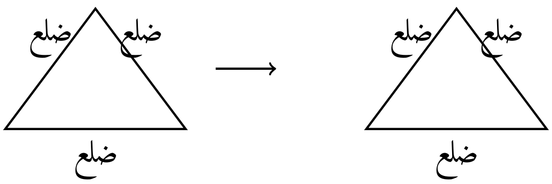
نظرية 5.2: حالة زاوية، ضلع، زاوية (ASA)

إذا تساوت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



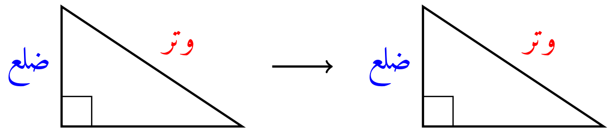
نظرية 6.2: حالة ضلع، ضلع، ضلع (SSS)

إذا تساوت الأضلاع الثلاثة في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



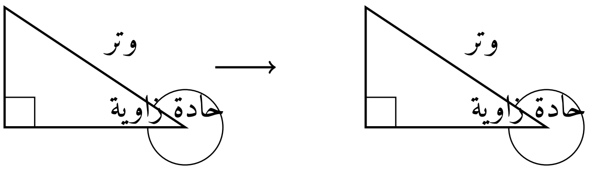
نظرية 7.2: حالة الوتر وضلع (للمثلث القائم) (HL)

في المثلث القائم، إذا تساوى الوتر وأحد الضلعين الآخرين في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



نظرية 8.2: حالة الوتر والزاوية الحادة (للمثلث القائم) (HA)

في المثلث القائم، إذا تساوى الوتر وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



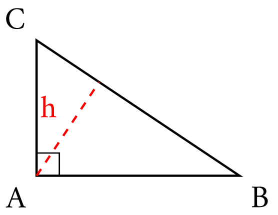
المستقيمات الخاصة في مثلث

تعريف 5.2: ارتفاع المثلث

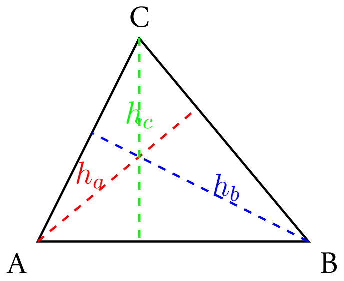
ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل (أو امتداده) وتكون عمودية عليه.

نظرية 9.2: خصائص الارتفاع في المثلث

1. لكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تلتقي في نقطة واحدة تسمى **مركز الأقطار** (Orthocenter)
2. في المثلث حاد الزوايا، يقع مركز الأقطار داخل المثلث
3. في المثلث قائم الزاوية، يقع مركز الأقطار عند رأس الزاوية القائمة
4. في المثلث منفرج الزاوية، يقع مركز الأقطار خارج المثلث



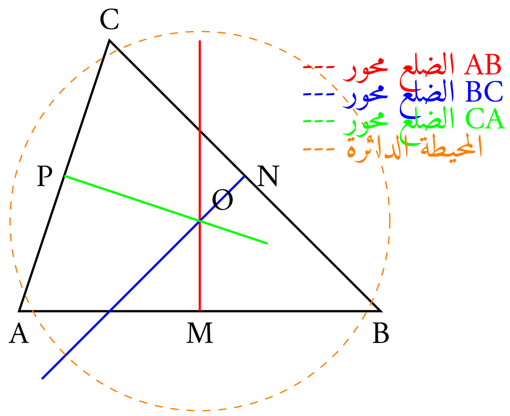
الزاوية قائم مثلث



الزوايا حاد مثلث

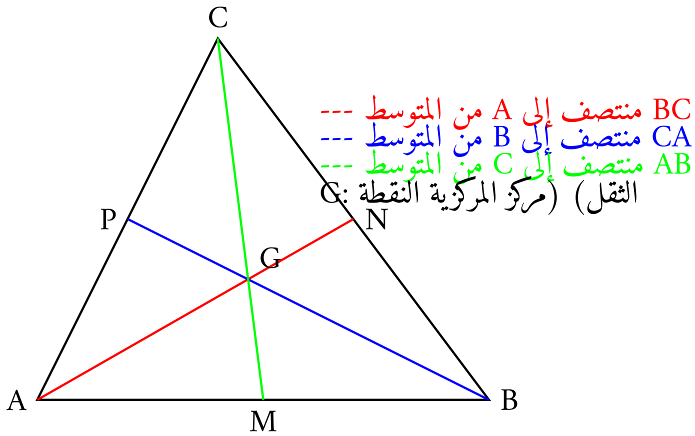
تعريف 6.2: محور ضلع المثلث

محور ضلع المثلث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع من منتصفه. لكل مثلث ثلاثة محاور لأضلاعه.



نظرية 10.2: خصائص محاور أضلاع المثلث

1. كل نقطة على محور ضلع تكون متساوية البعد عن طرفي هذا الضلع
2. محاور أضلاع المثلث تلتقي في نقطة واحدة تسمى **مركز الدائرة المحيطة** (Circumcenter)



تعريف 7.2: متوسط المثلث

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأس من رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.

نظرية 11.2: خصائص متوسطات المثلث

1. متوسطات المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى **النقطة المركزية** أو **مركز الثقل**.
2. النقطة المركزية تقسم كل متوسط بنسبة 2:1 (الجزء الأقرب إلى الرأس ضعف الجزء الأقرب إلى الضلع)

تعريف 8.2: منصف الزاوية في المثلث

منصف الزاوية في المثلث هو المستقيم الذي يقسم الزاوية إلى زاويتين متساويتين في القياس.

نظرية 12.2: خصائص منصفات زوايا المثلث

1. منصفات زوايا المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى **مركز الدائرة المحاطة**.
2. الدائرة المحاطة تمس أضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

3.3.2 الرباعيات

تعريف 9.2: متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو مضلع رباعي فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول.

نظرية 13.2: شروط متوازي الأضلاع

يكون الرباعي متوازي أضلاع **إذا وفقط إذا** تحقق أحد الشروط التالية:

1. كل ضلعان متقابلان متوازيان.
2. كل ضلعان متقابلان متساويان في الطول.
3. كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس.
4. كل زاويتان متتاليتان مجموع قياسيهما $180°$.
5. قطراه ينصف كل منهما الآخر.
6. زوج واحد من الأضلاع المتقابلة متوازٍ ومتساوٍ في الطول.

تعريف 10.2: معين

المعين هو متوازي أضلاع **جميع** أضلاعه متساوية في الطول.

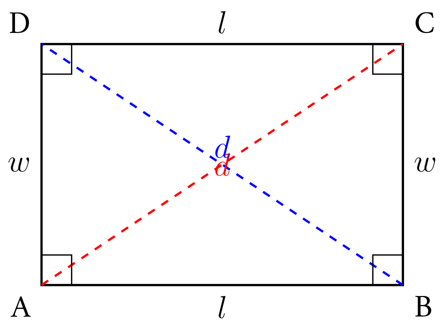
نظرية 14.2: شروط المعين

يكون متوازي الأضلاع معيناً **إذا وفقط إذا** تحقق أحد الشروط التالية:

1. جميع أضلاعه متساوية في الطول.
2. قطراه متعامدان.
3. أحد قطريه ينصف إحدى زواياه.

تعريف 11.2: مستطيل

المستطيل هو متوازي أضلاع **جميع زواياه قائمة** (90°).



نظرية 15.2: خصائص المستطيل

بما أن المستطيل هو حالة خاصة من متوازي الأضلاع، فإنه يحتفظ بجميع خواص متوازي الأضلاع، بالإضافة إلى الخصائص التالية:

1. جميع زواياه قائمة (90°)
2. قطراه متساويان في الطول

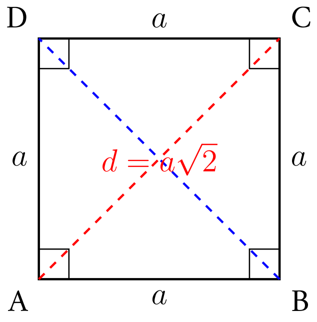
نظرية 16.2: شروط المستطيل

يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً **إذا وفقط إذا** تحقق أحد الشروط التالية:

1. جميع زواياه قائمة
2. قطراه متساويان في الطول
3. إحدى زواياه قائمة

تعريف 12.2: مربع

المربع هو مضلع رباعي **جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع زواياه قائمة** (90°).



نظرية 17.2: خصائص المربع

بما أن المربع هو حالة خاصة من متوازي الأضلاع، فإنه يحتفظ بجميع خواص متوازي الأضلاع، المستطيل، والمعين، بالإضافة إلى الخصائص التالية:

1. جميع أضلاعه متساوية في الطول
2. جميع زواياه قائمة $(90°)$
3. قطراه متساويان في الطول
4. قطراه متعامدان
5. كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين

نظرية 18.2: شروط المربع

يكون الرباعي مربعاً **إذا وفقط إذا** تحقق أحد الشروط التالية:

1. مستطيل جميع أضلاعه متساوية
2. معين جميع زواياه قائمة
3. جميع أضلاعه متساوية وجميع زواياه قائمة

4.2 المضلع المنتظم

تعريف 13.2: مضلع منتظم

المضلع المنتظم هو مضلع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه الداخلية متطابقة.

نظرية 19.2: خصائص المضلع المنتظم

للمضلع المنتظم ذي n ضلعًا الخصائص التالية:

1. يمكن رسم **دائرة محيطة** به تمر بجميع رؤوسه.
2. يمكن رسم **دائرة محاطة** داخله تمس جميع أضلاعه.
3. مركز الدائرتين (المحيطة والمحاطة) هو نفس النقطة (مركز المضلع).
4. جميع أضلاعه متساوية الطول.
5. جميع زواياه الداخلية متساوية القياس.
6. جميع زواياه الخارجية متساوية القياس.

نظرية 20.2: قوانين المضلع المنتظم

للمضلع المنتظم ذي n ضلعًا وطول ضلع a:

- قياس الزاوية الداخلية: $\theta = \dfrac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$
- قياس الزاوية الخارجية: $\phi = \dfrac{360^\circ}{n}$
- قياس الزاوية المركزية: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$
- محيط المضلع: $P = n \times a$

مثال 2.2: مضلعات منتظمة شائعة

الاسم	عدد الأضلاع	الزاوية الداخلية	الزاوية المركزية	مجموع الزوايا الداخلية
مثلث متساوي الأضلاع	3	60°	120°	180°
مربع	4	90°	90°	360°
خماسي منتظم	5	108°	72°	540°
سداسي منتظم	6	120°	60°	720°
سباعي منتظم	7	128.57°	51.43°	900°
ثماني منتظم	8	135°	45°	1080°

نظرية 21.2: مجموع الزوايا الداخلية

في أي مضلع محدب ذي n ضلعًا، يكون مجموع الزوايا الداخلية:

$$S = (n-2) \times 180^\circ$$

وفي المضلع المنتظم، كل زاوية داخلية تساوي:

$$\theta = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

نظرية 22.2: مجموع الزوايا الخارجية

في أي مضلع محدب، يكون مجموع الزوايا الخارجية (زاوية واحدة عند كل رأس) دائمًا مساويًا لـ:

$$S_{\text{خارجي}} = 360^\circ$$

وفي المضلع المنتظم، كل زاوية خارجية تساوي:

$$\phi = \frac{360^\circ}{n}$$

مثال 3.2: حساب زاوية سداسي منتظم

في السداسي المنتظم ($n = 6$):

$$\text{مجموع الزوايا الداخلية} = (6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$$

$$\text{قياس كل زاوية داخلية} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\text{الزاوية الخارجية} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

5.2 خواص المماس والمستقيم القطري في الدائرة

تعريف 14.2: مماس الدائرة

مماس الدائرة هو مستقيم يلمس الدائرة في **نقطة واحدة فقط** تسمى **نقطة التماس**.

تعريف 15.2: قطر الدائرة

قطر الدائرة هو وتر يمر بمركز الدائرة، وهو **أطول وتر** في الدائرة.

تعريف 16.2: نصف القطر

نصف القطر هو قطعة تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة على محيطها.

نظرية 23.2: خاصية تعامد المماس مع نصف القطر

1. نصف القطر المرسوم إلى نقطة التماس يكون **عمودياً** على المماس.
2. إذا كان المستقيم عمودياً على نصف القطر عند نهايته على الدائرة، فإنه يكون **مماساً** للدائرة.

برهان 1.2: برهان خاصية تعامد المماس مع نصف القطر

الجزء الأول: لنبرهن أن نصف القطر المرسوم إلى نقطة التماس يكون عمودياً على المماس.
لنفرض لدائرة مركزها O، ومماس PT يمس الدائرة عند النقطة A، ونصف القطر OA.
البرهان بالتناقض: لنفترض أن OA غير عمودي على PT. إذاً يوجد زاوية $\angle OAP < 90°$ أو $\angle OAP > 90°$.

- إذا كان $\angle OAP < 90°$، يمكننا إنشاء عمود من O على PT يقطعه عند النقطة B، حيث $B \neq A$.
- بما أن $OB \perp PT$، فإن $OB < OA$ (لأن OA مائل وOB عمودي).
- لكن B تقع على PT، وإذا كانت $OB < OA$، فهذا يعني أن النقطة B تقع داخل الدائرة.
- ولكن PT يجب أن يلمس الدائرة عند نقطة واحدة فقط، وهذا تناقض.

بنفس الطريقة، إذا افترضنا أن $\angle OAP > 90°$، سنصل إلى تناقض مماثل.
إذاً الافتراض خاطئ، و $OA \perp PT$.

الجزء الثاني: لنبرهن أنه إذا كان المستقيم عمودياً على نصف القطر عند نهايته على الدائرة، فإنه يكون مماساً للدائرة.
لنفرض أن المستقيم PT عمودي على نصف القطر OA عند النقطة A التي تقع على الدائرة.
البرهان:

- لنأخذ أي نقطة أخرى B على المستقيم PT، حيث $B \neq A$.
- في المثلث OAB، الزاوية $\angle OAB = 90°$ (لأن $PT \perp OA$).
- باستخدام نظرية فيثاغورس: $OB^2 = OA^2 + AB^2$
- بما أن $AB > 0$، فإن $OB^2 > OA^2$، وبالتالي $OB > OA$
- هذا يعني أن أي نقطة أخرى B على المستقيم PT (غير A) تقع خارج الدائرة.
- لذلك، المستقيم PT يلمس الدائرة عند النقطة A فقط، وهو بالتالي مماس للدائرة.

6.2 الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

تعريف 17.2: زاوية مركزية

الزاوية المركزية هي زاوية رأسها عند **مركز الدائرة** وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة.

تعريف 18.2: زاوية محيطية

الزاوية المحيطية هي زاوية رأسها على **محيط الدائرة** وضلعاها وتران في الدائرة.

نظرية 24.2: العلاقة بين الزاوية المحيطية والزاوية المركزية

الزاوية المحيطية تساوي **نصف** قياس الزاوية المركزية المقابلة لنفس القوس.

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha$$

حيث θ هي الزاوية المحيطية و α هي الزاوية المركزية المقابلة لنفس القوس.

نظرية 25.2: حالات خاصة للزاوية المحيطية

1. الزاوية المحيطية المقابلة لقطر تكون **قائمة** $(90°)$
2. الزوايا المحيطية المقابلة لنفس القوس تكون **متطابقة**

برهان 2.2: برهان العلاقة بين الزاوية المحيطية والمركزية

الحالة الأولى: أحد ضلعي الزاوية المحيطية هو قطر.
لنفرض أن AC قطر، والزاوية المحيطية $\angle ABC$، والزاوية المركزية $\angle AOC$.

- $OA = OB = OC$ (أنصاف أقطار)
- المثلث AOB متساوي الساقين، لذا $\angle OAB = \angle OBA$
- المثلث BOC متساوي الساقين، لذا $\angle OBC = \angle OCB$

- $\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB$
- $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBC$
- إذن $\angle AOC = 2(\angle OBA + \angle OBC) = 2\angle ABC$
- لذلك $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

الحالة العامة: يمكن إثباتها بتقسيم الزاوية المركزية إلى زاويتين مركزيتين واستخدام الحالة الأولى.

نظرية 26.2: زاوية محيطية مقابلة لقطر

نظرية طالس: الزاوية المحيطية في نصف دائرة تكون قائمة.

إذا كانت AB قطراً، فإن $\angle ACB = 90°$

الرباعي الدائري

تعريف 19.2: رباعي دائري

الرباعي الدائري هو رباعي **جميع رؤوسه تقع على محيط الدائرة نفسها**. نقول أن الرباعي **محاط بدائرة**.

نظرية 27.2: خواص الرباعي الدائري

إذا كان الرباعي $ABCD$ دائرياً، فإن الخواص التالية تكون متحققة:

1. **خاصية الزوايا المتقابلة:** $\angle A + \angle C = 180°$ و $\angle B + \angle D = 180°$
2. **خاصية الزوايا المحيطية:** الزوايا المحيطية المقابلة لنفس القوس تكون متساوية، $\angle ABD = \angle ACD$ (مقابلتان للقوس AD)
3. **خاصية بطليموس:** $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$
4. **خاصية الزاوية الخارجية:** الزاوية الخارجة عند أي رأس تساوي الزاوية الداخلية عند الرأس المقابل

5. **خاصية التشابه:** المثلثات الناتجة من تقاطع القطرين تكون متشابهة

نظرية 28.2: شروط كون الرباعي دائرياً

الرباعي $ABCD$ يكون دائرياً إذا تحقق أحد الشروط التالية:

1. $\angle A + \angle C = 180°$
أو $\angle B + \angle D = 180°$ (مجموع زاويتين متقابلتين = $180°$)
2. $\angle ABD = \angle ACD$
أو $\angle ADB = \angle ACB$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس)
3. $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ (تحقيق نظرية بطليموس)
4. الزاوية الخارجة عند أحد الرؤوس تساوي الزاوية الداخلية عند الرأس المقابل

نظرية 29.2: نظرية بطليموس

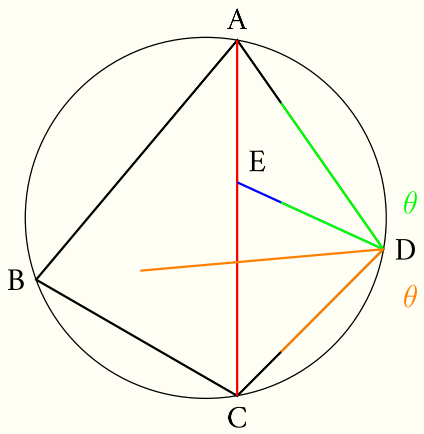
في الرباعي الدائري، يكون حاصل ضرب طولي القطرين مساوياً لمجموع حاصل ضرب طولي كل ضلعين متقابلين.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

برهان 3.2: برهان نظرية بطليموس

لنفرض رباعياً دائرياً $ABCD$، ونريد إثبات أن:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$



الخطوات:

1. نرسم القطر AC، ثم نرسم المستقيم DE بحيث $\angle CDE = \angle ADB$ والنقطة E تقع على AC.

2. **التشابه الأول:** المثلثان ABD و ECD متشابهان لأن:
   - $\angle ABD = \angle ECD$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس AD)
   - $\angle ADB = \angle CDE$ (بالإنشاء)
   - وبالتالي $\angle BAD = \angle CED$ (مجموع زوايا المثلث = $180°$)

3. من التشابه نستنتج:
$$\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{ED}$$
وبخاص:
$$AB \cdot CD = BD \cdot EC \quad (1)$$

4. **التشابه الثاني:** المثلثان ADE و BDC متشابهان لأن:
   - $\angle DAE = \angle DBC$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس DC)
   - $\angle ADE = \angle BDC$ (لأن $\angle ADE = \angle ADC - \angle CDE$ و $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB$، وبما أن $\angle CDE = \angle ADB$ بالإنشاء، فإن $\angle ADE = \angle BDC$)

5. من التشابه نستنتج:
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{DC}$$

وبخاص:

$$AD \cdot BC = BD \cdot AE \quad (2)$$

6. بجمع المعادلتين (1) و (2):

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot EC + BD \cdot AE$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot (EC + AE)$$

7. لكن $EC + AE = AC$ (لأن E تقع على القطعة AC بين A و C)

8. إذن:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD \cdot AC$$

وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة: النقطة E هي نقطة تقاطع المستقيم DE (المرسوم بزاوية $\angle CDE = \angle ADB$) مع القطر AC. هذا الإنشاء هو المفتاح لبرهان النظرية.

مثال 4.2: رباعيات دائرية شائعة

- **المربع**: رباعي دائري (جميع الزوايا $90°$)
- **المستطيل**: رباعي دائري (جميع الزوايا $90°$)
- **شبه المنحرف متساوي الساقين**: رباعي دائري
- **المعين**: ليس دائرياً إلا إذا كان مربعاً

ملاحظة 1.2: ملاحظات هامة

- ليس كل رباعي يمكن أن يكون دائرياً
- متوازي الأضلاع يكون دائرياً فقط إذا كان مستطيلاً
- المعين يكون دائرياً فقط إذا كان مربعاً

- شبه المنحرف يكون دائرياً فقط إذا كان متساوي الساقين

نظرية 30.2

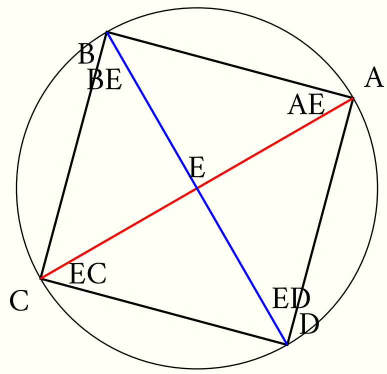
في الرباعي الدائري، إذا تقاطع قطراه في النقطة E، فإن:

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED$$

برهان 4.2: برهان نظرية قوة النقطة في الرباعي الدائري

لنبرهن أنه في الرباعي الدائري $ABCD$ الذي يتقاطع قطراه في النقطة E، فإن:

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED$$



البرهان باستخدام تشابه المثلثات:

1. **الفرض:** الرباعي $ABCD$ دائري، والأقطار AC و BD يتقاطعان في E
2. **التشابه الأول:** المثلثان ABE و CDE متشابهان

- $\angle AEB = \angle CED$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)
- $\angle ABE = \angle CDE$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس AC)
- $\angle BAE = \angle DCE$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس BC)
- **النتيجة:** $\triangle ABE \sim \triangle CDE$

3. **الاستنتاج من التشابه الأول:**

$$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$$

وبالتالي:

$$AE \cdot DE = BE \cdot CE \quad (1)$$

4. **التشابه الثاني:** المثلثان ADE و BCE متشابهان

- $\angle AED = \angle BEC$ (زاويتان متقابلتان بالرأس)
- $\angle ADE = \angle BCE$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس AB)
- $\angle DAE = \angle CBE$ (زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس CD)
- **النتيجة:** $\triangle ADE \sim \triangle BCE$

5. **الاستنتاج من التشابه الثاني:**

$$\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$$

وبالتالي:

$$AE \cdot CE = BE \cdot DE \quad (2)$$

6. **الملاحظة:** المعادلتان (1) و (2) متكافئتان، وكلاهما تؤدي إلى:

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED$$

الخلاصة: تم إثبات النظرية باستخدام تشابه المثلثات الناتجة عن تقاطع أقطار الرباعي الدائري. العلاقة $AE \cdot EC = BE \cdot ED$ تعبر عن أن حاصل ضرب أطوال قطعتي كل قطر متساوٍ.

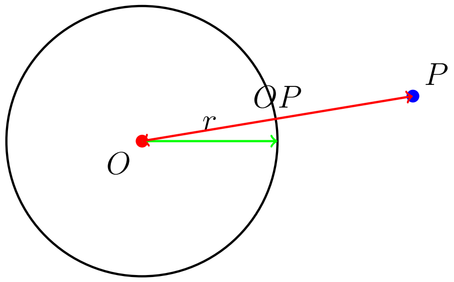
7.2 قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة

تعريف 20.2: قوة النقطة

إذا كان لدينا دائرة نصف قطرها r، ومركزها النقطة O، ونقطة P، فإن قوة النقطة P بالنسبة إلى الدائرة O، والتي يُرمَز لها بـ $\text{pow}(P)_O$، تُعطى بالصيغة:

$$\text{pow}(P)_O = OP^2 - r^2$$

$$\text{pow}(P)_O = OP^2 - r^2$$



الدائرة O

نظرية 31.2: إشارة قوة النقطة

نفترض أن لدينا الدائرة O والنقطة P. قوة النقطة P بالنسبة إلى الدائرة O يُرمَز لها بـ $\text{pow}(P)_O$.

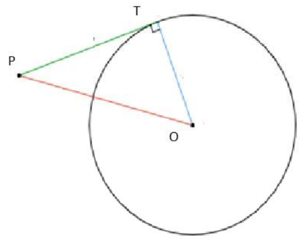
- إذا كانت $\text{pow}(P)_O > 0$، فإن النقطة P تقع خارج الدائرة O.
- إذا كانت $\text{pow}(P)_O = 0$، فإن النقطة P تقع على الدائرة O.
- إذا كانت $\text{pow}(P)_O < 0$، فإن النقطة P تقع داخل الدائرة O.

نظرية 32.2: قوة النقطة وطول المماس

نفترض أن لدينا الدائرة O، والنقطة P خارج الدائرة. نفترض أيضًا أن PT مماس للدائرة عند T.

إذن:

$$\text{pow}(P)_O = PT^2$$



شكل 1.2: قوة النقطة وطول المماس

برهان 5.2: برهان الخاصية

- بما أن PT مماس للدائرة عند T، فإن $OT \perp PT$
- في المثلث القائم PTO (الزاوية $\angle OTP = 90^\circ$)
- حسب نظرية فيثاغورس:

$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

- ولكن $OT = r$ (نصف القطر)
- إذن:

$$PT^2 = OP^2 - r^2$$

- وحسب تعريف قوة النقطة:

$$\text{pow}(P)_O = OP^2 - r^2$$

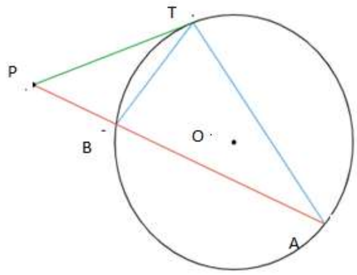
- لذلك:

$$\text{pow}(P)_O = PT^2$$

نظرية 33.2: قوة النقطة وأطوال القطع المستقيمة من قاطع

نفترض أن لدينا الدائرة O، والنقطة P خارج الدائرة. نفترض أيضًا أن PA قاطع للدائرة عند النقطتين B، A على الترتيب (حيث B هي الأقرب إلى P). إذن:

$$\text{pow}(P)_O = PB \times PA$$



قوة النقطة وأطوال القطع المستقيمة من قاطع

شكل 2.2: قوة النقطة وأطوال القطع المستقيمة من قاطع

برهان 6.2: برهان الخاصية

- لنرسم المماس PT من النقطة P إلى الدائرة عند النقطة T
- حسب الخاصية السابقة: $\text{pow}(P)_O = PT^2$
- الآن نعتبر المثلثين PTB و PAT:
  - $\angle PTB = \angle PAT$ (زاوية بين مماس ووتر تساوي الزاوية المحيطية المقابلة)
  - $\angle TPB = \angle APT$ (زاوية مشتركة)

- إذن $\triangle PAT \sim \triangle PTB$

• من التشابه:

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA} \Rightarrow PB \times PA = PT^2$$

• ولكن $PT^2 = \text{pow}(P)_O$

• إذن:

$$\text{pow}(P)_O = PB \times PA$$

نظرية 34.2: قوة النقطة لمماس وقاطع

نفترض أن لدينا الدائرة O، والنقطة P تقع خارج الدائرة. نفترض أيضًا أن PT مماس للدائرة عند النقطة T، وأن PC قاطع للدائرة عند النقطتين A، C على الترتيب (حيث A هي الأقرب إلى P). إذن:

$$PT^2 = PA \times PC$$

برهان 7.2: برهان النظرية

• نلاحظ أن المثلثين PTA و PCT متشابهان لأن:

- $\angle TPA = \angle CPT$ (زاوية مشتركة)
- $\angle PTA = \angle PCT$ (زاوية بين مماس ووتر تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لنفس القوس TC)

• من تشابه المثلثين $\triangle PTA \sim \triangle PCT$ نستنتج:

$$\frac{PT}{PC} = \frac{PA}{PT}$$

• وبالتالي:

$$PT^2 = PA \times PC$$

• وحسب تعريف قوة النقطة، نعلم أن:

$$\text{pow}(P)_O = PT^2$$

- إذن:

$$\text{pow}(P)_O = PA \times PC$$

مثال 5.2: تطبيق على النظرية

إذا كان طول المماس $PT = 6$ سم، وطول $PA = 4$ سم، فإن:

$$6^2 = 4 \times PC \Rightarrow 36 = 4 \times PC \Rightarrow PC = 9\text{سم}$$

وبما أن $PC = PA + AC$، فإن:

$$AC = PC - PA = 9 - 4 = 5\text{سم}$$

نظرية 35.2: قوة النقطة لقاطعين

نفترض أن لدينا الدائرة O، والنقطة P خارج الدائرة. نفترض أيضًا أن PA قاطع للدائرة عند النقطتين B، A على الترتيب (حيث B هي الأقرب إلى P)، و PC قاطع آخر للدائرة نفسها عند النقطتين D، C على الترتيب (حيث D هي الأقرب إلى P). إذن:

$$PB \times PA = PD \times PC$$

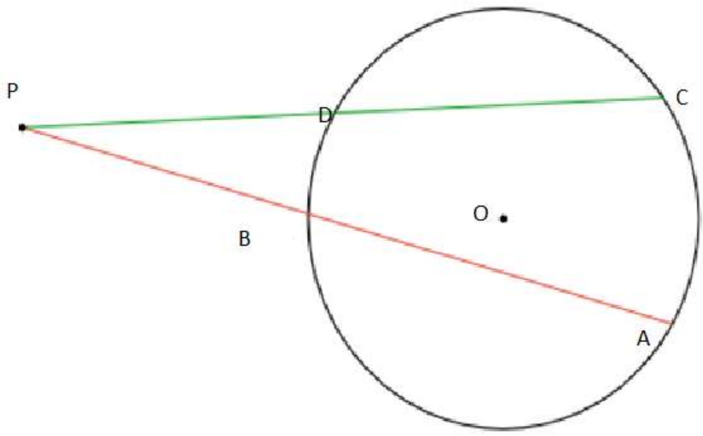
برهان 8.2: برهان النظرية

- لنرسم المماس PT من النقطة P إلى الدائرة عند النقطة T
- حسب نظرية قوة النقطة للمماس والقاطع، نعلم أن:

$$PT^2 = PB \times PA$$

و

$$PT^2 = PD \times PC$$



شكل 3.2: قوة النقطة لقاطعين

- إذن:

$$PB \times PA = PT^2 = PD \times PC$$

- وبالتالي:

$$PB \times PA = PD \times PC$$

- وحسب تعريف قوة النقطة، نعلم أن:

$$\text{pow}(P)_O = PB \times PA = PD \times PC$$

مثال 6.2: تطبيق على النظرية

إذا كان $PB = 3$ سم، $PA = 12$ سم، و $PD = 4$ سم، فإن:

$$3 \times 12 = 4 \times PC \Rightarrow 36 = 4 \times PC \Rightarrow PC = 9_{\text{سم}}$$

وبما أن $PC = PD + DC$، فإن:

$$DC = PC - PD = 9 - 4 = 5_{\text{سم}}$$

ملاحظة 2.2: ملاحظة هامة

هذه النظرية تعمم فكرة قوة النقطة، حيث أن قيمة $PA \times PB$ ثابتة بغض النظر عن اختيار القاطع المار بالنقطة P. هذه القيمة الثابتة هي بالضبط قوة النقطة P بالنسبة للدائرة O.

8.2 التحويلات النقطية المألوفة

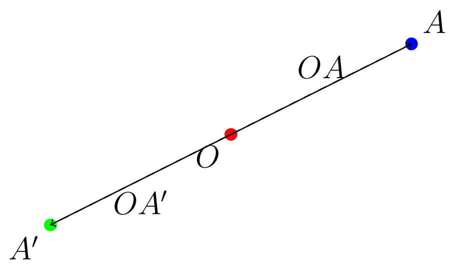
1.8.2 التناظر المركزي

تعريف 21.2: التناظر المركزي

التناظر المركزي هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة A في المستوى إلى نقطة A' بحيث:

- النقطة O (مركز التناظر) هي منتصف القطعة AA'
- المسافة $OA = OA'$
- النقاط A، O، A' تقع على استقامة واحدة

AA' منتصف O و $OA = OA'$



نظرية 36.2: خصائص التناظر المركزي

1. التناظر المركزي هو تحويل إزاحة بمتجه معدوم
2. يحافظ على استقامة النقاط

3. يحافظ على **توازي المستقيمات**

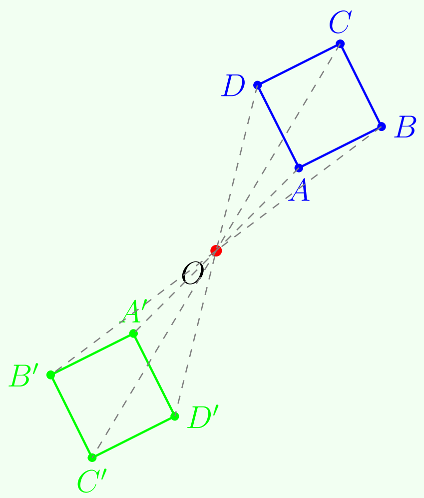
4. يحافظ على **أطوال القطع المستقيمة**

5. يحافظ على **قياس الزوايا**

6. يحول **الدائرة** إلى دائرة أخرى لها نفس نصف القطر

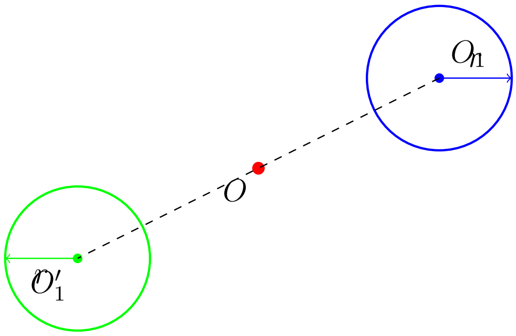
7. مركز الدائرة هو مناظر مركز الدائرة الأصلية

مثال 7.2: تناظر شكل رباعي



نظرية 37.2: تناظر دائرة

إذا كانت C دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها r، وكان O مركز التناظر، فإن مناظر الدائرة C بالتناظر المركزي O هي دائرة C' مركزها O'_1 (مناظر O_1) ونصف قطرها r.



نظرية 38.2: مركز تناظر شكل

يقال للشكل أنه له مركز تناظر إذا وجدت نقطة O بحيث أن صورة الشكل بالتناظر المركزي O هي الشكل نفسه.

مثال 8.2: أشكال لها مركز تناظر

- **المتوازي الأضلاع**: نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظره
- **المعين**: نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظره
- **المستطيل**: نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظره
- **المربع**: نقطة تقاطع قطريه هي مركز تناظره
- **الدائرة**: مركزها هو مركز تناظرها

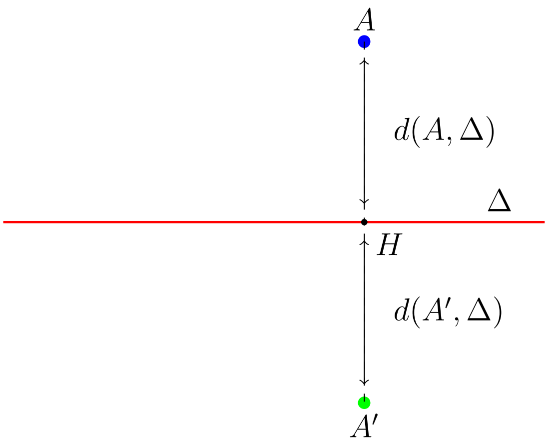
2.8.2 التناظر المحوري

تعريف 22.2: التناظر المحوري

التناظر المحوري هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة A في المستوى إلى نقطة A' بحيث:

- المستقيم Δ (محور التناظر) هو **المُنَصِّف العمودي** للقطعة AA'
- المسافة من A إلى Δ تساوي المسافة من A' إلى Δ

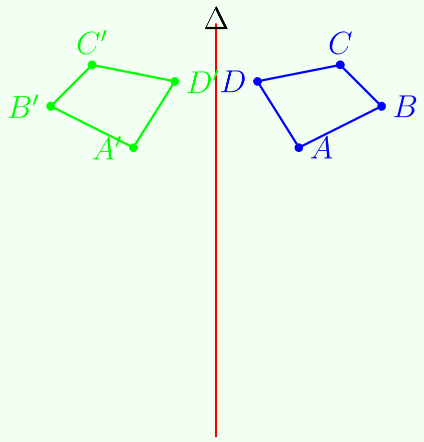
- النقاط A و A' متقابلتان بالنسبة للمحور Δ



نظرية 39.2: خصائص التناظر المحوري

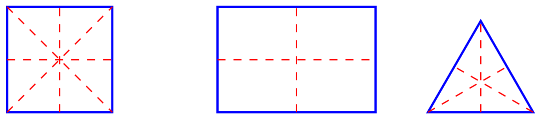
1. المحور Δ هو محور تناظر **للمستوى كله**
2. يحافظ على **أطوال القطع المستقيمة**
3. يحافظ على **قياس الزوايا**
4. يحول **مستقيماً** إلى مستقيم
5. يحول **دائرة** إلى دائرة أخرى لها نفس نصف القطر

مثال 9.2: تناظر شكل رباعي



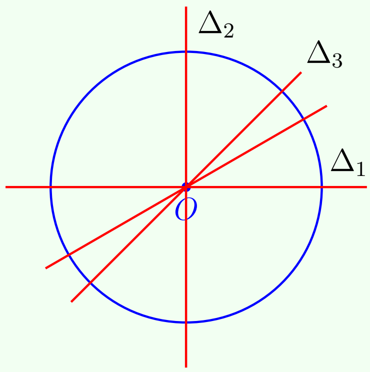
نظرية 40.2: محاور تناظر الأشكال الهندسية

- **المستقيم**: له عدد لا نهائي من محاور التناظر (جميع المستقيمات العمودية عليه)
- **قطعة مستقيمة**: لها محور تناظر واحد (المُنَصِّف العمودي لها)
- **الدائرة**: لها عدد لا نهائي من محاور التناظر (جميع المستقيمات المارة بمركزها)
- **المربع**: له 4 محاور تناظر
- **المستطيل**: له 2 محور تناظر
- **المثلث متساوي الأضلاع**: له 3 محاور تناظر
- **المثلث متساوي الساقين**: له 1 محور تناظر



محاور 3 - الأضلاع متساوي مثلث　　محور 2 - مستطيل　　محاور 4 - مربع

مثال 10.2: تناظر دائرة



التناظر محاور من نهائي لا عدد لها الدائرة

نظرية 41.2: التناظر المحوري والمستقيمات

- إذا كان المستقيم d عمودياً على محور التناظر Δ، فإن مناظره هو نفسه
- إذا كان المستقيم d موازياً لمحور التناظر Δ، فإن مناظره هو مستقيم موازٍ له
- إذا قطع المستقيم d محور التناظر Δ، فإن مناظره يقطع Δ في نفس النقطة

تمرين 1.2: تمارين تطبيقية

1. إذا كانت $A(3,2)$، ومحور التناظر هو محور السينات $(y=0)$، فما إحداثيات النقطة A' المناظرة لها؟

2. أرسم مناظر المثلث ABC حيث $A(1,1)$، $B(3,1)$، $C(2,3)$ بالنسبة لمحور التناظر $x=0$

3. كم محور تناظر للشكل الثماني المنتظم؟

4. أثبت أن مناظر دائرة مركزها O ونصف قطرها r بالتناظر المحوري هو دائرة مركزها O' ونصف قطرها r

ملاحظة 3.2: ملاحظات هامة

- التناظر المحوري يحافظ على المسافات (تحويل متساوي القياس)
- في التناظر المحوري، **الاتجاه** ينعكس (اليد اليمنى تصبح يداً يسرى)
- محور التناظر يقسم الشكل إلى قسمين متطابقين

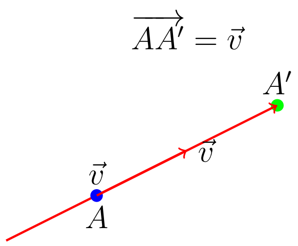
9.2 الانسحاب

تعريف 23.2: الانسحاب

الانسحاب هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة A في المستوى إلى نقطة A' بحيث:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$$

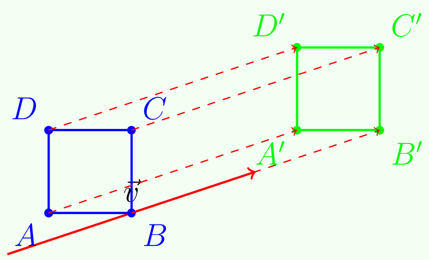
حيث $\vec{v}$ هو متجه الانسحاب الثابت لجميع نقاط الشكل.



نظرية 42.2: خصائص الانسحاب

1. الانسحاب يحافظ على **أطوال القطع المستقيمة**
2. الانسحاب يحافظ على **قياس الزوايا**
3. الانسحاب يحافظ على **توازي المستقيمات**
4. الانسحاب يحافظ على **تعامد المستقيمات**
5. الانسحاب يحول **مستقيماً** إلى مستقيم موازٍ له
6. الانسحاب يحول **دائرة** إلى دائرة أخرى لها نفس نصف القطر

مثال 11.2: انسحاب شكل رباعي



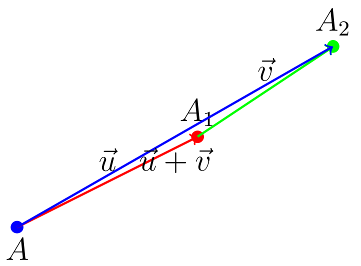
نظرية 43.2: مركب الانسحابات

إذا كان t_1 انسحاباً بمتجه $\vec{u}$ و t_2 انسحاباً بمتجه $\vec{v}$، فإن:

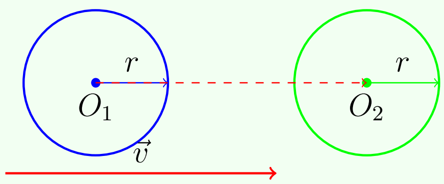
$$t_2 \circ t_1 = t$$

حيث t انسحاب بمتجه $\vec{u} + \vec{v}$.

$t_2 \circ t_1 = t$ بمتجه $\vec{u}+\vec{v}$



مثال 12.2: انسحاب دائرة



نظرية 44.2: الانسحاب في المستوى الإحداثي

إذا كان متجه الانسحاب $\vec{v}=(a,b)$، فإن صورة النقطة $A(x,y)$ بالانسحاب هي:

$$A'(x+a, y+b)$$

مثال 13.2: انسحاب في المستوى الإحداثي

إذا كانت $A(2,3)$ ومتجه الانسحاب $\vec{v}=(4,-1)$، فإن:

$$A' = (2+4, 3+(-1)) = (6,2)$$

نظرية 45.2: الانسحاب والمتجهات

- الانسحاب بمتجه معدوم $\vec{0}$ هو التحويل المطابق (لا يغير النقاط)
- الانسحاب بمتجه $\vec{v}$ معكوسه هو انسحاب بمتجه $-\vec{v}$

- مجموعة الانسحابات تشكل زمرة تبديلية تحت عملية التركيب

تمرين 2.2: تمارين تطبيقية

1. إذا كانت $A(1,2)$، $B(3,4)$، ومتجه الانسحاب $\vec{v}=(2,-1)$، فأوجد إحداثيات A' و B'
2. أثبت أن الانسحاب يحول مستقيمًا إلى مستقيم موازٍ له
3. إذا كان انسحاب بمتجه $\vec{u}$ يطابق الشكل F مع الشكل F'، وانسحاب بمتجه $\vec{v}$ يطابق F' مع F''، فما متجه الانسحاب الذي يطابق F مع F'' مباشرة؟
4. ارسم مناظر المثلث ABC حيث $A(0,0)$، $B(2,0)$، $C(1,2)$ بالانسحاب بمتجه $\vec{v}=(3,1)$

1.9.2 التحاكي

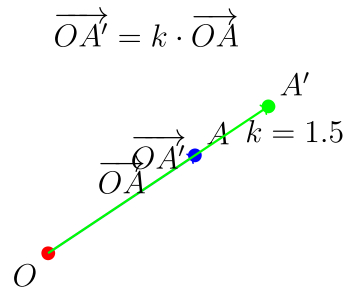
تعريف 24.2: التحاكي

التحاكي هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة A في المستوى إلى نقطة A' بحيث:

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$$

حيث:

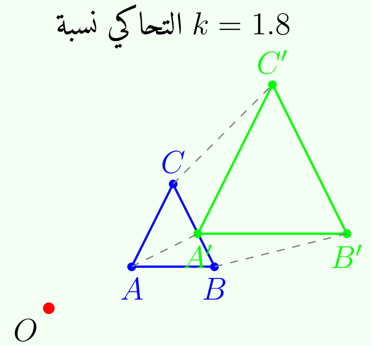
- O: مركز التحاكي
- k: نسبة التحاكي (عدد حقيقي غير صفري)
- إذا كان $k>0$: النقاط المناظرة على نفس الجهة من المركز
- إذا كان $k<0$: النقاط المناظرة على جهتين متقابلتين من المركز



نظرية 46.2: خصائص التحاكي

1. التحاكي يحافظ على **استقامية النقاط**
2. التحاكي يحافظ على **توازي المستقيمات**
3. التحاكي يحافظ على **قياس الزوايا**
4. التحاكي يضرب **الأطوال** في $|k|$
5. التحاكي يضرب **المساحات** في k^2
6. التحاكي يحول **دائرة** إلى دائرة أخرى
7. مركزا الدائرتين ومركز التحاكي على استقامة واحدة

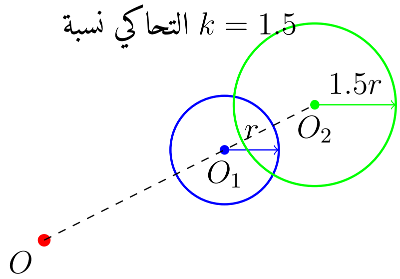
مثال 14.2: تحاكي مثلث



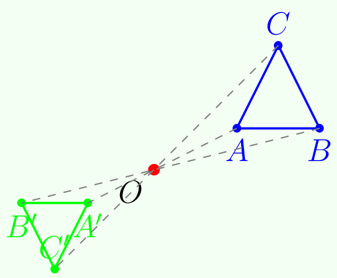
نظرية 47.2: تحاكي دائرة

إذا كانت C دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها r، وكان التحاكي بمركز O ونسبة k، فإن:

- صورة الدائرة C هي دائرة C' مركزها O_1' (صورة O_1)
- نصف قطر الدائرة C' هو $|k| \cdot r$
- النقاط O، O_1، O_1' على استقامة واحدة



مثال 15.2: تحاكي بإشارة سالبة



نظرية 48.2: التحاكي في المستوى الإحداثي

إذا كان مركز التحاكي هو الأصل $O(0,0)$ ونسبة التحاكي k، فإن صورة النقطة $A(x,y)$

بالتحاكي هي:

$$A'(kx, ky)$$

مثال 16.2: تحاكي في المستوى الإحداثي

إذا كانت $A(2,3)$ ونسبة التحاكي $k = 2$ ومركزه الأصل، فإن:

$$A' = (2 \times 2, 2 \times 3) = (4, 6)$$

إذا كانت $k = -0.5$، فإن:

$$A' = (-0.5 \times 2, -0.5 \times 3) = (-1, -1.5)$$

ملاحظة 4.2: ملاحظات هامة

- التحاكي يحافظ على **الشكل** ولكن يغير **الحجم**
- عندما يكون $|k| > 1$: تكبير
- عندما يكون $|k| < 1$: تصغير
- عندما يكون $k = 1$: تحويل مطابق
- عندما يكون $k = -1$: تناظر مركزي

2.9.2 الدوران

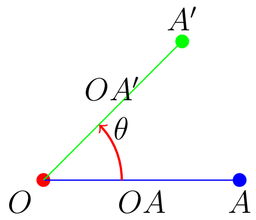
تعريف 25.2: الدوران

الدوران هو تحويل هندسي ينقل كل نقطة A في المستوى إلى نقطة A' بحيث:

- المسافة من مركز الدوران O إلى A تساوي المسافة من O إلى A': $OA = OA'$
- قياس الزاوية $\angle AOA'$ يساوي زاوية الدوران θ

- اتجاه الدوران يكون إما مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة

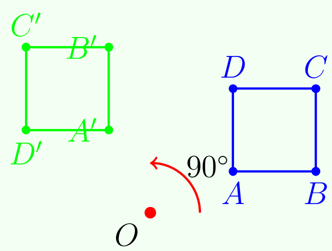
$$OA = OA' \text{ و } \angle AOA' = \theta$$



نظرية 49.2: خصائص الدوران

1. الدوران يحافظ على **أطوال القطع المستقيمة**
2. الدوران يحافظ على **قياس الزوايا**
3. الدوران يحافظ على **توازي المستقيمات**
4. الدوران يحافظ على **تعامد المستقيمات**
5. الدوران يحول **دائرة** إلى دائرة أخرى لها نفس نصف القطر
6. مركز الدائرة يدور حول مركز الدوران بنفس الزاوية

مثال 17.2: دوران شكل رباعي

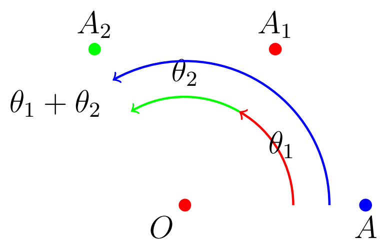


نظرية 50.2: مركب الدورانات

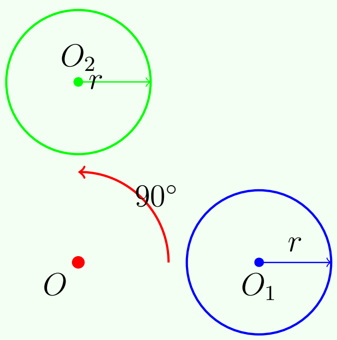
- إذا كان R_1 دوراناً بزاوية θ_1 حول مركز O، و R_2 دوراناً بزاوية θ_2 حول نفس المركز O، فإن:

$$R_2 \circ R_1 = R \quad \text{حيث } R \text{ دوران بزاوية } \theta_1 + \theta_2 \text{ حول } O$$

- إذا كان مركزا الدوران مختلفين، فإن المركب يكون دوراناً بزاوية $\theta_1 + \theta_2$ حول مركز ثالث



مثال 18.2: دوران دائرة



نظرية 51.2: الدوران في المستوى الإحداثي

إذا كان مركز الدوران هو $(0,0)$ وزاوية الدوران θ، فإن صورة النقطة $A(x,y)$ بالدوران هي:

$$A'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

برهان 9.2: برهان الدوران في المستوى الإحداثي

لنبرهن أنه إذا كان مركز الدوران هو الأصل $O(0,0)$ وزاوية الدوران θ، فإن صورة النقطة $A(x,y)$ بالدوران هي:

$$A'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

الخطوات:

1. لنفرض النقطة $A(x,y)$ في المستوى الإحداثي. يمكن تمثيلها باستخدام الإحداثيات القطبية:
$$x = r\cos\alpha \quad \text{و} \quad y = r\sin\alpha$$
حيث:
   - $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (بعد النقطة عن الأصل)
   - α هي الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{OA}$ مع المحور x الموجب

2. عند تدوير النقطة A بزاوية θ حول الأصل، تنتقل إلى النقطة A' التي لها نفس البعد r عن الأصل، ولكن زاويتها تصبح $\alpha + \theta$

3. إحداثيات النقطة A' في النظام القطبي هي:
$$x' = r\cos(\alpha+\theta) \quad \text{و} \quad y' = r\sin(\alpha+\theta)$$

4. باستخدام متطابقات جمع الزوايا في المثلثات:
$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$$
$$\sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta$$

5. بالتعويض عن x و y:
$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) \\ &= (r\cos\alpha)\cos\theta - (r\sin\alpha)\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y' &= r\sin(\alpha+\theta)\\
&= r(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)\\
&= (r\sin\alpha)\cos\theta+(r\cos\alpha)\sin\theta\\
&= y\cos\theta+x\sin\theta\\
&= x\sin\theta+y\cos\theta
\end{aligned}
$$

6. إذن إحداثيات النقطة A' بعد الدوران هي:

$$A'(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

مثال 19.2: دوران في المستوى الإحداثي

إذا كانت $A(2,0)$ ودورناها بزاوية $90°$ حول الأصل، فإن:

$$A' = (2\cos 90° - 0\sin 90°, 2\sin 90° + 0\cos 90°) = (0,2)$$

نظرية 52.2: زوايا الدوران الخاصة

- الدوران بزاوية $360°$ هو التحويل المطابق
- الدوران بزاوية $180°$ يكافئ التناظر المركزي

10.2 تمارين

تمرين 3.2

لتكن $\widehat{XOY}$ زاويةً، ولتكن النقطة I نقطةً داخلها لا تنتمي إلى أيٍّ من نصفي المستقيمين $[OX)$ و $[OY)$. نريد إيجاد نقطتين $M \in [OX)$ و $N \in [OY)$ بحيث تكون I منتصف قطعة المستقيم $[MN]$.

تمرين 4.2

(C) دائرة مركزها A، O نقطة ثابتة من (C)، و M نقطة متغيرة من (C). يرمز بـ N لمنتصف $[AM]$.

ما هي مجموعة النقط N عندما تمسح النقطة M الدائرة (C)؟

تمرين 5.2

(C) و (C') دائرتان مركزاهما O و O' ونصفا قطرهما 6cm و 2cm على الترتيب، ومتماستان خارجياً في النقطة A. المماس المشترك لهما الخارجي يمس الدائرتين في النقطتين M و N على الترتيب. المماس المشترك لهما في النقطة A يقطع (MN) في النقطة B.

1. بين أن $BA = BM = BN$، واستنتج نوع المثلث AMN.
2. ما نوع المثلث BOO'؟ برر جوابك.
3. أحسب MN (قرب القيمة إلى $0,01$).
4. أحسب قيس الزاوية $\widehat{BOO'}$، واستنتج الأقياس $\widehat{AMN}$، $\widehat{MNA}$، $\widehat{BO'O}$.
5. لنكن E نقطة تقاطع (OB) و (AN)، و F نقطة تقاطع $(O'B)$ و (AM). ما نوع الرباعي $AFBE$؟ أحسب مساحته (قرب القيمة إلى $0,01$).
6. بين أن $(NO') \parallel (MO)$.