باب 1

الاستدلال والبرهان الرياضياتيين

1.1 البرهان المباشر

تمرين 1.1

لتكن a, b, c أعدادًا صحيحة. إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$، فإن $a \mid c$.

تمرين 2.1

إذا كان x عددًا صحيحًا زوجيًا، فإن $x^2 - 6x + 5$ عدد فردي.

تمرين 3.1

إذا كان $a, b, c \in \mathbb{N}$، فإن

$$\operatorname{lcm}(ca, cb) = c \cdot \operatorname{lcm}(a, b).$$

تمرين 4.1

لتكن x و y عددين موجبين. إذا كان $x \leq y$، فإن $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

تمرين 5.1

إذا كان x و y عددين حقيقيين موجبين، فإن

$$2\sqrt{xy} \leq x + y.$$

2.1 البرهان بفصل الحالات

تمرين 6.1

إذا كان $n \in \mathbb{N}$، فإن العدد

$$1 + (-1)^n(2n - 1)$$

مضاعف للعدد 4.

تمرين 7.1

إذا كان عددان صحيحان متخالفين في الزوجية، فإن مجموعهما عدد فردي.

3.1 تمارين متنوعة

تمرين 8.1

1. إذا كان x عددًا صحيحًا زوجيًا، فإن x^2 عدد زوجي.
2. إذا كان x عددًا صحيحًا فرديًا، فإن x^3 عدد فردي.
3. إذا كان a عددًا صحيحًا فرديًا، فإن $a^2 - 3a - 5$ عدد فردي.
4. لنفترض أن $x, y \in \mathbb{Z}$. إذا كان كل من x و y عددين فرديين، فإن xy عدد فردي.
5. لنفترض أن $x, y \in \mathbb{Z}$. إذا كان x عددًا زوجيًا، فإن xy عدد زوجي.

6. لنفترض أن $a, b, c \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$، فإن $a \mid (b-c)$.

7. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a \mid b$، فإن $a^2 \mid b^2$.

8. لنفترض أن a عدد صحيح. إذا كان $5 \mid 2a$، فإن $5 \mid a$.

9. لنفترض أن a عدد صحيح. إذا كان $7 \mid 4a$، فإن $7 \mid a$.

10. لنفترض أن a, b عددان صحيحان. إذا كان $a \mid b$، فإن $a \mid (3b^3 - b^2 + 5b)$.

11. لنفترض أن $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$، فإن $ac \mid bd$.

12. إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $0 \leq x \leq 4$، فإن

$$\frac{4}{x(4-x)} \geq 1.$$

13. لنفترض أن $x, y \in \mathbb{R}$. إذا كان $x^2+5y \leq y^2+5x$، فإن $x \leq y$ أو $x+y \leq 5$.

14. إذا كان $n \in \mathbb{Z}$، فإن $5n^2 + 3n + 7$ عدد فردي. (جرّب الحالات.)

15. إذا كان $n \in \mathbb{Z}$، فإن $n^2 + 3n + 4$ عدد زوجي. (جرّب الحالات.)

16. إذا كان عددان صحيحان لهما نفس الزوجية، فإن مجموعهُما عدد زوجي. (جرّب الحالات.)

17. إذا كان عددان صحيحان متخالفين في الزوجية، فإن حاصل ضربهما عدد زوجي.

18. لنفترض أن x, y عددان حقيقيان موجبان. إذا كان $x \leq y$، فإن $x^2 \leq y^2$.

19. لنفترض أن a, b, c أعداد صحيحة. إذا كان $a^2 \mid b$ و $b^3 \mid c$، فإن $a^6 \mid c$.

20. إذا كان a عددًا صحيحًا و $a^2 \mid a$، فإن $a \in \{-1, 0, 1\}$.

21. إذا كان p عددًا أوليًا و k عددًا صحيحًا بحيث $0 \leq k \leq p$، فإن p يقسم $\binom{p}{k}$.

22. إذا كان $n \in \mathbb{N}$، فإن

$$n^2 \leq 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}.$$

(قد تحتاج إلى حالة منفصلة عندما $n = 1$.)

23. إذا كان $n \in \mathbb{N}$، فإن $\binom{2n}{n}$ عدد زوجي.

24. إذا كان $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$، فإن الأعداد

$$n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ n! + 5,\ \ldots,\ n! + n$$

كلها أعداد مؤلفة (مركبة). (وبالتالي لكل $n \geq 2$، يمكن إيجاد $n - 1$ عددًا مؤلفًا متتاليًا. وهذا يعني وجود "فجوات" كبيرة جدًا بين الأعداد الأولية.)

25. إذا كان $a, b, c \in \mathbb{N}$ و $c \leq b \leq a$، فإن

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}.$$

26. كل عدد صحيح فردي يمكن كتابته كفرق بين مربعين. (مثال: $7 = 4^2 - 3^2$.)

27. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{N}$. إذا كان $\gcd(a, b) \neq 1$، فإن $a \mid b$ أو أن b ليس عددًا أوليًا.

28. لنفترض أن $a, b, c \in \mathbb{Z}$. إذا كان a وb ليسا كلاهما صفراً، و$c \neq 0$، فإن

$$c \cdot \gcd(a, b) \mid \gcd(ca, cb).$$

4.1 البرهان بالعكس النقيض

تمرين 9.1

1. لنفترض أن $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان n^2 زوجي فإن n زوجي.

2. لنفترض أن $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان n^2 فردي فإن n فردي.

3. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a^2(b^2 - 2b)$ عددًا فرديًا فإن كلا من a و b فرديان.

4. لنفترض أن $a, b, c \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a \nmid bc$ فإن $a \nmid b$.

5. لنفترض أن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان $x^2 - 5x \leq 0$ فإن $x \leq 0$.

6. لنفترض أن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان $x^3 - x \geq 0$ فإن $x \geq -1$.

7. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$. إذا كان كلا من ab و $a - b$ زوجيين، فإن كلا من a و b زوجيان.

8. لنفترض أن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان
$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 \geq 0,$$
فإن $x \geq 0$.

9. لنفترض أن $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان $3 \nmid n^2$ فإن $3 \nmid n$.

10. لنفترض أن $x, y, z \in \mathbb{Z}$ و $x \neq 0$. إذا كان $x \mid yz$ فإن $x \mid y$ و $x \mid z$.

11. لنفترض أن $x, y \in \mathbb{Z}$. إذا كان $x^2(y-3)$ زوجيًا، فإن x زوجي أو y فردي.

12. لنفترض أن $a \in \mathbb{Z}$. إذا لم يكن a^2 قابلاً للقسمة على 4، فإن a فردي.

13. لنفترض أن $x \in \mathbb{R}$. إذا كان
$$x^5 - 7x^3 - 5x \geq x^4 + x^2 + 8,$$
فإن $x \geq 0$.

14. إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ ولهما نفس الزوجية، فـ $3a - 7$ و $7b - 4$ ليسا لهما نفس الزوجية.

15. لنفترض أن $x \in \mathbb{Z}$. إذا كان $x^3 - 1$ زوجيًا، فإن x فردي.

16. لنفترض أن $x, y \in \mathbb{Z}$. إذا كان $x - y$ زوجيًا، فإن x و y لهما نفس الزوجية.

17. إذا كان n فرديًا، فإن $8 \mid (n^2 - 1)$.

18. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$. إذن
$$(a-b)^3 \equiv a^3 - b^3 \pmod 3.$$

19. لنفترض أن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $a \equiv b \pmod n$ و $a \equiv c \pmod n$، فإن $c \equiv b \pmod n$.

20. إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ و $a \equiv 1 \pmod 5$، فإن $a^2 \equiv 1 \pmod 5$.

21. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $a \equiv b \pmod n$، فإن $a^3 \equiv b^3 \pmod n$.

22. لنفترض أن $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$. إذا كان القسمة تبقي الباقي r عند قسمة a على n، فإن $a \equiv r \pmod n$.

23. لنفترض أن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $a \equiv b \pmod n$، فإن $a^2 \equiv ab \pmod n$.

24. إذا كان $a \equiv b \pmod n$ و $c \equiv d \pmod n$، فإن $ac \equiv bd \pmod n$.

25. لنفترض أن $n \in \mathbb{N}$. إذا كان $2^n - 1$ عددًا أوليًا، فإن n عدد أولي.

26. إذا كان $n = 2^k - 1$ لِبعض $k \in \mathbb{N}$، فإن كل المدخلات في الصف n من مثلث باسكال هي أعداد فردية.

27. إذا كان $a \equiv 0 \pmod 4$ أو $a \equiv 1 \pmod 4$، فإن a^2 زوجي.

28. لنفترض أن $n \in \mathbb{Z}$. فإن $4 \nmid (n^2 - 3)$.

29. إذا كان a و b عددين صحيحين وليسا كلاهما صفرًا، فإن $\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$.

30. إذا كان $a \equiv b \pmod n$، فإن $\gcd(a, n) = \gcd(b, n)$.

31. لنفترض أن خوارزمية القسمة على a و b تعطي $a = qb + r$. برهن أن $\gcd(a, b) = \gcd(r, b)$.

32. إذا كان $a \equiv b \pmod n$، فإن a و b لهما نفس الباقي عند القسمة على n.

5.1 البرهان بالتناقض

تمرين 10.1

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن

$$a^2 - 4b \neq 2.$$

تمرين 11.1

العدد $\sqrt{2}$ غير نسبي.

تمرين 12.1

لكل عدد حقيقي $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$، لدينا

$$\sin x + \cos x \geq 1.$$

تمرين 13.1

لنفرض أن $a \in \mathbb{Z}$. إذا كان a^2 عددًا زوجيًا، فإن a عدد زوجي.

تمرين 14.1

استخدم طريقة البرهان بالتناقض لإثبات العبارات الآتية:

1. لنفرض أن $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان n فرديًا فإن n^2 فردي.
2. لنفرض أن $n \in \mathbb{Z}$. إذا كان n^2 فرديًا فإن n فردي.
3. ثبت أن $\sqrt[3]{2}$ عدد غير نسبي.
4. ثبت أن $\sqrt{6}$ عدد غير نسبي.
5. ثبت أن $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي.
6. إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن $a^2 - 4b - 2 \neq 0$.
7. إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن $a^2 - 4b - 3 \neq 0$.
8. لنفرض أن $a, b, c \in \mathbb{Z}$. إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$ فإن a أو b عدد زوجي.
9. لنفرض أن $a, b \in \mathbb{R}$. إذا كان a عددًا نسبيًا وab عددًا غير نسبي، فإن b عدد غير نسبي.

10. لا توجد أعداد صحيحة a و b تحقق $21a+30b=1$.

11. لا توجد أعداد صحيحة a و b تحقق $18a+6b=1$.

12. لكل $x>0$ في $\mathbb{Q}$ يوجد $y>0$ في $\mathbb{Q}$ بحيث $y<x$.

13. لكل $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$، لدينا $\sin x - \cos x \geq 1$.

14. إذا كانت A وB مجموعتين، فإن $A \setminus (B \setminus A) = \varnothing$.

15. إذا كان $b \in \mathbb{Z}$ و$b \mid k$ لكل $k \in \mathbb{N}$، فإن $b=0$.

16. إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فإن $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

17. لكل $n \in \mathbb{Z}$، $4 \mid (n^2+2)$.

18. لنفرض أن $a, b \in \mathbb{Z}$. إذا كان $4 \mid (a^2+b^2)$، فلا يمكن أن يكون كل من a و b فرديين معًا.

6.1 البرهان بالتراجع

تمرين 15.1

أثبت العبارات التالية باستعمال البرهان بالاستقراء (العادي أو القوي) أو برهان بأصغر مثال معاكس:

1. $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ لكل عدد صحيح موجب n.

2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لكل عدد صحيح موجب n.

3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ لكل عدد صحيح موجب n.

4. إذا كان $n \in \mathbb{N}$، فإن

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

5. $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ لكل عدد صحيح موجب n.