

Algèbre et codage TD 01

Exercice 1. Soit A un anneau et $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille des idéaux de A . Montrer que $I = \bigcap_{\lambda \in L} I_\lambda$ est un idéal de A .

Exercice 2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ premier entre eux i.e. $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Montrer qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ non trivial, avec

$$\bar{x}^2 = \bar{x}.$$

Indication: Utiliser le théorème de Bezout.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif I, J, K des idéaux de A . Montrer que

$$\textcircled{a} \quad I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K. \qquad \textcircled{b} \quad I + J = A \text{ alors } I \cdot J = I \cap J.$$

Exercice 4. Trouver l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit A, B, C trois anneaux, $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ des hom des anneaux, on a

- $\textcircled{a}$ $g \circ f$ est un hom de A dans C .
- $\textcircled{b}$ Si f est un isom de A dans B , f^{-1} est un isom de B dans A .

Exercice 6. Soit A un anneau d'intégrité de caractéristique p . Alors $p = 0$ ou p un nombre premier.

Exercice 7. Soit A un anneau principal et $a_1, \dots, a_n \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $\textcircled{a}$ $a_1, \dots, a_n$ premier entre eux dans A .
- $\textcircled{b}$ Ils existent des éléments $u_1, \dots, u_n \in A$ tels que

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 1.$$

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient, ou $n \in \mathbb{N}$, on a

- $\textcircled{a}$ $\bar{a}$ est inversible ssi $\text{pgcd}(a, n) = 1$.
- $\textcircled{b}$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.

Exercice 9. Soit M un idéal de A . M est maximal ssi A/M est un corps.

Exercice 10. Soit $K \neq \{0\}$ un anneau commutatif. Pour K soit un corps, il faut et il suffit que les seuls idéaux de K sont $\{0\}$ et K .