2• $h=f^{-1}:[f(b),f(a)]\longrightarrow[a,b]$ مستمر ومتناقص تمامًا.

البرهان: يتم بطريقة مشابهة للنظرية السابقة مع استبدال f بـ $-f$.

5.3.3 – ملاحظة هامة:

في النظرية السابقة ليس بالضرورة أن يكون المجال I مغلقًا ومحدودًا،

فمثلاً: $f:[a,+\infty[\longrightarrow[f(a),+\infty[$ ونأخذ $a<x_0$ ، $f(a)<y_0$

ونأخذ $f:[a,x_0]\longrightarrow[f(a),y_0]$ وبعد تطبيق إحدى النظريتين السابقتين

نجعل $x_0,y_0\longrightarrow+\infty$.

مثال: ليكن $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

وليكن $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا معرفًا.

عين A حتى يكون $g=f^{-1}$ ثم برهن أن $g=f^{-1}$ مستمر ومتزايد تمامًا.

الحل: إن f مستمر ومتزايد تمامًا على $[0,1]$ لأنه إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية كيفية من عناصر $[0,1]$ متقاربة نحو x_0 فإن:

$(x_n+1)_n$ و $(x_n+2)_n$ متقاربتان (حسب 11.1.2) وحيث أن:

$$\forall x_n\in[0,1]: x_n+2\neq0$$

فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n+1}{x_n+2}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+1)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+2)}=\frac{x_0+1}{x_0+2}=f(x_0)$$

وعليه f مستمر، أو بطريقة أخرى نقول هو قسمة تابعين مستمرين و $x+2\neq0$ على $[0,1]$ فهو مستمر و f متزايد تمامًا لأن:

$$x<y\Rightarrow\frac{x+1}{x+2}<\frac{y+1}{y+2}\Rightarrow f(x)<f(y)$$

ومنه حسب النظرية السابقة فإن:

$f:[0,1]\longrightarrow[f(0),f(1)]=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$ تقابل فله تابع عكسي ومنه:

$g=f^{-1}:\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]\longrightarrow[0,1]$ ومنه $A=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$.

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x+2}\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=g(y)=\frac{1-2y}{y-1}$$

ونرى بنفس الطريقة أن g مستمر ومتزايد تمامًا على $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$.

4.3 – الاشتقاق:

1.3.3 – مشتق تابع عند نقطة، مشتق تابع على مجال (التابع المشتق):

سنرمز في كل هذا الفصل بـ $I=[a,b]$ لمجال من $\mathbb{R}$. ليكن:

$$f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow y=f(x)$$

نقول إن f يقبل الاشتقاق عند النقطة $x_0\in]a,b[$ إذا ($\Leftrightarrow$) كانت النهاية (المنتهية) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x\in I)$ موجودة ووحيدة.

وتسمى هذه النهاية الوحيدة عندئذ بمشتق f عند x_0 ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$، أي أن:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وهذا في حال الوجود، ويرمز أحيانًا لهذه النهاية أيضًا بأحد الرموز التالية:

$\dfrac{df}{dx}(x_0)$ أو $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ أو $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ حيث $\begin{pmatrix}\Delta x=x-x_0\\ x=x_0+\Delta x\end{pmatrix}$

ونقول أن f يقبل الاشتقاق على المجال I إذا ($\Leftrightarrow$) كان f يقبل الاشتقاق عند كل نقطة $x \in I$ أي أن: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ موجودة، ونرمز لهذه النهاية بـ $f'(x)$.

أي:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وتزودنا هذه المعادلة بقاعدة لربط كل عدد $x \in I$ بالعدد $f'(x)$ وتسمى مجموعة جميع الأزواج $(x, f'(x))$ التي يتم تشكيلها بهذه الطريقة، بالتابع المشتق f'.

إذا رمزنا بـ D_f لمجموعة تعريف f فإن $D_{f'} \subseteq D_f$.

إن المشتقات ضرورية في نظرية الاقتصاد حيث يصفونها بأنها "هامشية".

مثلا: لنفرض على سبيل المثال: أن مصنعًا ينتج x طنا من الفولاذ أسبوعيًا بكلفة إجمالية مقدرة بالدينار مساوية إلى $y=f(x)$.

إن هذه الكلفة الإجمالية تتضمن مصاريف الصيانة والرواتب والضرائب وثمن المادة الخام...الخ.

ولنفرض أنه من أجل إنتاج $x+\Delta x$ طنًا من الفولاذ أسبوعيًا تكون الكلفة $y+\Delta y$ دينار.

إن الزيادة في الكلفة من أجل كل وحدة زيادة في الإنتاج تساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

تسمى النهاية $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ بالكلفة الهامشية وهي عبارة عن مشتق y بالنسبة لـ x.

مثال آخر:

نريد تفريغ حوض سباحة بغية تنظيفه، فإذا كانت y تمثل عدد لترات الماء في الحوض بعد t دقيقة من بداية تفريغ الحوض وكانت $y=200(30-t)^2$.

فما هي سرعة انصباب الماء من الحوض عند نهاية الدقيقة العاشرة؟

الحل: بما أن السرعة تعطى بـ $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=10}$، أي قيمة المشتق عند $t=10$

وبالتالي فإن:

$$y'=\lim_{t \to 10} \frac{dy}{dt}=400(30-10)=800$$

أي سرعة انصباب الماء هي 800 لتر/دقيقة.

أمثلة:

1. إذا كان $f(x)=c$ ثابت فإن $f'(x)=0$ لأن:

$$f'(x)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{x-x_0}=0$$

2. إذا كان $f(x)=x^n$ فإن: $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$ لأن:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x_0+\cdots+x_0^{n-1}) \\
&= \underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}}_{\text{مرة } n-}=nx_0^{n-1}
\end{aligned}$$

3• $f(x)=\sqrt{x}$ فإن: $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ لأن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

4• $f(x)=\sin x$ فإن $f'(x)=\cos x$ لأن:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\Delta x)=\cos x$$

لأن $\cos x$ مستمر و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

وكذلك عوضنا العبارتين:

$$\cos\Delta x=\cos\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos^2\frac{\Delta x}{2}-\sin^2\frac{\Delta x}{2}$$

$$\sin\Delta x=\sin\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x}{2}$$

في العبارة التالية:

$$\sin(x+\Delta x)=\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x$$

2.4.3 – المشتق على يمين (على يسار) نقطة:

إذا كانت النهاية (المنتهية) $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ووحيدة، فنقول أن f يقبل الاشتقاق على يمين x_0 أو من اليمين، لأن $x\xrightarrow{>}x_0$ تعني أن x يقترب نحو x_0 من الجهة اليمنى على المحور الحقيقي، وتسمى هذه النهاية المشتق من اليمين ونرمز لها بالرمز: $f'(x_0+0)$.

وبنفس الشكل نعرف المشتق على يسار x_0 ونرمز بـ:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

أي أن x يقترب نحو x_0 بقيم أقل أو أصغر من x_0 ($x\xrightarrow{<}x_0$).

ملاحظة هامة: إذا كان f تابعًا يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ فيجب الانتباه إلى أن:

$$f'(a+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}a}f'(x)$$

ليست صحيحة (ونفس الشيء بالنسبة لـ $f'(b-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}b}f'(x)$).

مثلا: نعتبر $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ:

$$f(x)=\begin{cases}0: x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x}: x\in]0,1[\end{cases}$$

فإنه: $\forall x\in]0,1[: f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

ونرى أن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f'(x)$ غير موجودة بسبب $\cos\frac{1}{x}$.

بينما:

$$f'(0+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

ويكون f قابلاً للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا (⇔) كان $f'(x_0-0)$ و $f'(x_0+0)$ موجودين و: $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$.

وعندئذ يكون:

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

أي أن: $\begin{cases} f'(x_0-0) \text{ و } f'(x_0+0) \text{ موجودين} \\ \text{ويحققان } f'(x_0+0)=f'(x_0-0) \end{cases} \Leftrightarrow f'(x_0)$ موجود ويساوي كل منهما.

أمثلة:

•1 $f(x)=|x|$ وليكن $x_0=0$ فإن:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x}{x}=1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يمين $x_0=0$.

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x}{x}=-1$$

ومنه f يقبل الاشتقاق على يسار $x_0=0$.

وحيث $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

•2 $f(x)=\sqrt{x}$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$$

ملاحظة 01: نعيد هنا نفس الملاحظة 4.1.3، فإذا كان:

$$f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

وأردنا الدقة فنستطيع القول دائما أن $f'(a)$ و $f'(b)$ غير موجودتين لأن $f'(a)$ (أو $f'(b)$) هو بالتعريف:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ولكن $x\longrightarrow a$ تعني أن $x\xrightarrow{>}a$ و $x\xrightarrow{<}a$ و $f(x)$ لا معنى له عندما $x\xrightarrow{<}a$.

مثلا: إذا كان $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفًا بـ $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ فإن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^{\frac{3}{2}}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x^{\frac{1}{2}}=0$$

بينما العبارة: $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}x^{\frac{1}{2}}$ لا معنى لها.

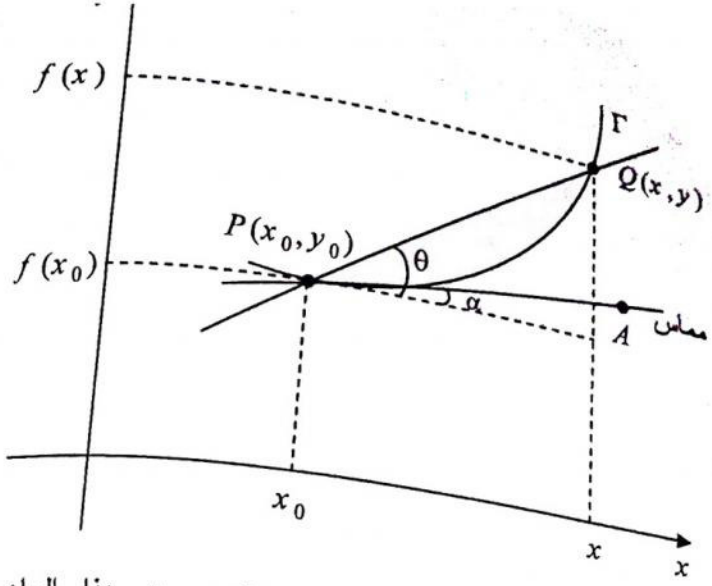
إذن f له مشتق على يمين $x_0=0$ بينما ليس له مشتق على يسار $x_0=0$، وبالتالي f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

فإذا قلنا أن f يقبل الاشتقاق من أجل $x\geq 0$ وأن الصيغة $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ صحيحة من أجل $x\geq 0$، فإننا نكون قد ابتعدنا قليلا عن الدقة، ولكن كثيرًا من الرياضيين ينطلقون في قولها دون قيد. (ويأملون من القارئ أن يفهم أنهم يعنون الاشتقاق على يمين $x_0=0$ أي $f'(0+0)$).

ملاحظة 02: إذا كان f معرفًا على $[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ ووجد كل من $f'(a+0)$ و $f'(b-0)$، أي المشتق على يمين a وعلى يسار b، فإننا نقول بغية التبسيط أن f يقبل الاشتقاق على $[a,b]$.

3.4.3 – المعنى الهندسي للمشتق:

ليكن Γ بيان التابع $y=f(x)$ في المستوى xoy كما في الشكل التالي:



ولتكن $P(x_0,f(x_0))$ و $Q(x,f(x))$ نقطتين من هذا البيان، عندما $x \to x_0$ فإن Q تقترب من P على البيان وبالتالي فإن القطعة $\overline{PQ}$ تؤول لتأخذ وضع المماس $\overrightarrow{PA}$ لبيان f عند P. فإذا كان $\overline{PQ}$ يصنع زاوية θ مع المحور الموجب ox فإن النسبة: $\tan\theta = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

وبالتالي فإن $f'(x_0)=\tan\alpha$ ، حيث α هي زاوية المماس مع المحور الموجب ox، أي أن الزاوية θ التي يصنعها $\overline{PQ}$ مع ox تؤول إلى الزاوية α التي يصنعها المماس مع ox عندما $x \to x_0$.

وبالتالي فإن مشتق f عند x_0 هو عبارة عن ميل المماس عند النقطة $P(x_0,y_0)$ ذات الفاصلة x_0.

إذن فالبحث عن مشتق تابع f عند نقطة x_0 يعني البحث عن مماس لبيان التابع f عند النقطة x_0.

يمكن أيضًا إعطاء المعنى الهندسي للمشتق على يمين (يسار) نقطة x_0 باعتبار نصف المماس الأيمن (ونصف المماس الأيسر) عند النقطة x_0،
إذا كان: $f'(x_0-0) \neq f'(x_0+0)$ ، فإن بيان f يمثل عندئذ نقطة زاوية عند $P(x_0,y_0)$ ، أي له مماسان عند P.

مثلا: ليكن $f:[-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ ,\ f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$.

لدينا $f(x)=|x|\sqrt{1+x}$ وبالتالي فإنه من أجل $x_0=0$:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\sqrt{1+x}}{x} = 1 = f'(0+0)$$

إذن f له مشتق على يمين $x_0=0$.

و

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-x\sqrt{1+x}}{x} = -1 = f'(0-0)$$

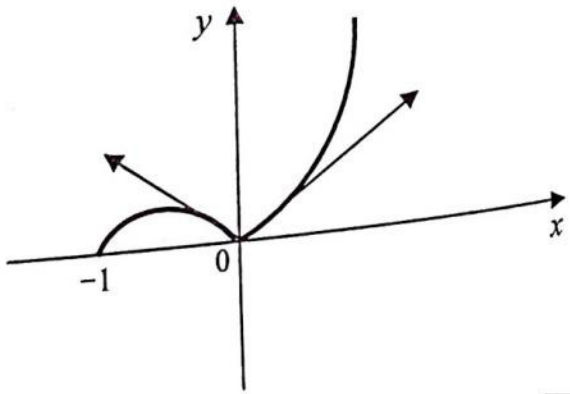
إذن f له مشتق على يسار $x_0=0$.

وحيث $f'(0+0) \neq f'(0-0)$ فإن f لا يقبل الاشتقاق عند $x_0=0$.

وحسب المعنى الهندسي فإن لبيان f مماسين عند $x_0=0$ ،

مماس بنصف الربع الأول $\alpha=\dfrac{\pi}{4} \Leftarrow \tan\alpha=1$

ومماس بنصف الربع الثاني $\alpha=\dfrac{3\pi}{4} \Leftarrow \tan\alpha=-1$



4.4.3 – توسيع أو تمديد تعريف المشتق:

إذا اعتبرت النهايات في $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$، نقول أن لـ f مشتقًا عند x_0 يساوي $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي مشتق غير منته عند x_0، إذا ($\Leftrightarrow$) كان f مستمرًا عند x_0 وكانت $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (أو $-\infty$)

وهذا يعني أن لبيان f مماس شاقولي عند $(x_0, f(x_0))$ أي إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن المماس عند $(x_0, f(x_0))$ يوازي ox وإذا كان $f'(x_0) = \infty$ فإن المماس عند $(x_0, f(x_0))$ يوازي oy.

مثلا: ليكن $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفًا بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ : \ x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} : x < 0 \end{cases}$$

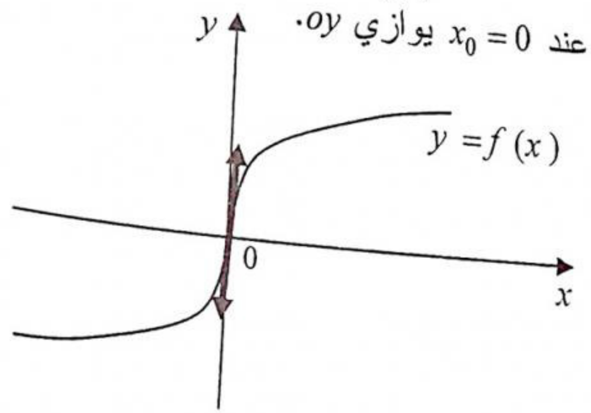
فإن لـ f مشتقًا غير منته عند $x_0 = 0$ لأن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-\sqrt{|x|}-0}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-|x|}{x\sqrt{|x|}}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

أي أن لـ f مماس عند $x_0 = 0$ يوازي oy.



5.4.3 – نظرية:

ليكن:

$$x_0 \in I = [a,b]\,, \quad f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

عندئذ f يقبل الاشتقاق عند x_0 $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ f مستمر عند x_0.

($\not\Rightarrow$) يكفي إعطاء مثال مضاد على أن العكس غير صحيح، رأينا أن $f(x) = |x|$ مستمر عند $x_0 = 0$ ولكنه لا يقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$.

كذلك f يقبل الاشتقاق على يمين x_0 (يسار x_0) $\underset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ f مستمرًا على يمين x_0 (يسار x_0).

ملاحظة: النظرية السابقة لا تبقى صحيحة في حالة المشتقات غير المنتهية.

مثلاً: التابع:

$$f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 : x \in \left]0,1\right] \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

ليس مستمرًا على يمين $x_0 = 0$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$ ولكن مشتقه على يمين $x_0 = 0$ هو $+\infty$ لأن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$$

6.4.3 – المشتقات المتتابعة:

ليكن $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$.

إذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 فنرمز لمشتقه بـ $f'(x_0)$.

وإذا قبل f' بدوره مشتقا عند x_0 أي أن: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ موجودة فنرمز لهذه النهاية بـ $f''(x_0)=f^{(2)}(x_0)$ ونسميها المشتق الثاني لـ f عند x_0 وهكذا بالتدريج نعرف المشتق من المرتبة n لـ f عند x_0 والذي نرمز له بـ $f^{(n)}(x_0)$ وهو النهاية:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$$ في حال وجودها.

ونصطلح على أن المشتق من المرتبة صفر (0) لـ f هو f نفسه أي أن: $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

تسمى المشتقات $f^{(0)},f^{(1)},\dots,f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة لـ f.

ونرمز لها أيضا بـ: $f'=\frac{df}{dx},\ f^{(2)}=\frac{d^2f}{dx^2},\dots,f^{(n)}=\frac{d^nf}{dx^n}$.

ملاحظة: يجب التمييز بين f^n الذي يعني الضرب $\underbrace{f\cdot f\cdots f}_{n}$ وبين $f^{(n)}$ الذي يعني المشتق من المرتبة n لـ f.

7.4.3 – نظرية:

ليكن $f,g:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و $x_0\in I$.

فإذا كان f,g قابلين للاشتقاق عند x_0 فإن ($\Leftarrow$) التوابع التالية: $f\pm g$، $f\cdot g$، $\frac{f}{g}\,(g(x_0)\neq0)$، $(\alpha.f)$ $\alpha\in\mathbb{R}$، كلها تقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا القواعد التالية:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$
$$(f.g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$
$$(\alpha f)'=\alpha f'$$

البرهان:

(نتذكر أن التوابع $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ تكون معرفة على $D_f\cap D_g$)

لدينا حسب التعريف:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

(لأن f و g قابلان للاشتقاق ولذلك أمكن توزيع النهاية).

إذن النهاية موجودة ومنتهية فنرمز لها بـ $(f\pm g)'(x_0)$. أي أن:

$$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

وحيث x_0 كيفية فإن هذا الأمر يتحقق عند كل نقطة من I ولذا نكتب اختصارا:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$

ونفس الشيء بالنسبة لـ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x_0)\right)$$

وحيث g يقبل الاشتقاق عند x_0 فهو مستمر عند x_0 و f و g يقبلان الاشتقاق عند x_0 وبالتالي فكل المقادير الموجودة داخل القوس تقبل نهاية لما $x\to x_0$ ومنه يمكن توزيع رمز النهاية إلى كل حد داخل القوس ونجد أن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+$$
$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0)$$

والمقدار في الطرف الأيمن موجود ومنته وبالتالي فالنهاية موجودة والتي نرمز لها بالرمز $(f\cdot g)'(x_0)$ أي أن:

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

وحيث x_0 كيفي فنرمز اختصارًا بــ:

$$(fg)'=f'g+g'f$$

وأخيرًا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-g(x)f(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right)$$

ولنفس الأسباب المذكورة سابقًا فإن:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g^2(x_0)}\left(f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)\right)$$

إذن النهاية موجودة ومنتهية وبالتالي فإن:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

ونرمز اختصارًا بــ: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$.

نتيجة: يمكن البرهان بالتدريج على أنه إذا كان f و g يقبلان الاشتقاق حتى المرتبة n فإن:

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$$
$$=c_n^0 f_g^{(n)}+c_n^1 f^{(n-1)}g'+\cdots+c_n^n fg^{(n)}$$

حيث $c_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

يسمى هذا الدستور بدستور لايبنز (Leibnitz) لاشتقاق الجداء.

8.4.3 – اشتقاق تابع مركب gof :

نظرية: ليكن I و J مجالين من $\mathbb{R}$ ونعرف التابعين f و g كما يلي:

$$f:I\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ g:J\longrightarrow\mathbb{R}$$

بحيث $f(I)\cap J\neq\phi$ ، عندئذ يمكن تعريف gof بــ:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(I)\cap J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ولتكن $x_0\in I$ بحيث $f(x_0)\in f(I)\cap J$ ، عندئذ إذا كان f يقبل الاشتقاق عند x_0 وكان g يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن gof يقبل الاشتقاق عند x_0 ولدينا:

$$(gof)'(x_0)=g'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)$$

البرهان: حسب التعريف:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(gof)(x)-(gof)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(x_0)\right)}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

وحيث f يقبل الاشتقاق عند x_0 فهو مستمر عند x_0 وبالتالي لما $x\to x_0$ فإن $f(x)\longrightarrow f(x_0)$ ، وحيث g يقبل الاشتقاق عند $f(x_0)$ فإن نهاية كل عبارة

من العبارتين الموجودتين داخل القوس موجودة وبالتالي يمكن توزيع النهاية ونحصل على:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(gof)(x)-(gof)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{f(x)\to f(x_0)}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

9.4.3 – مشتق تابع عكسي:

نظرية: إذا كان $f:I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعًا مستمرًا ومتزايدًا تمامًا (أو مستمرًا ومتناقص تمامًا) فإنه:

إذا كان f يقبل الاشتقاق عند $x_0\in I$ و $f'(x_0)\neq 0$ فإن التابع العكسي f^{-1} يقبل الاشتقاق عند $y_0=f(x_0)$ ويعطى مشتقه بالعلاقة:

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$$

البرهان: حسب النظرية 3.3.3 فإنه لدينا:

$$\begin{aligned} f:I=[a,b]&\longrightarrow[f(a),f(b)]\\ x&\longrightarrow y=f(x)\end{aligned}$$

تقابلا وبالتالي f^{-1} موجود ولدينا:

$$\begin{aligned} f^{-1}:[f(a),f(b)]&\longrightarrow[a,b]\\ y&\longrightarrow x=f^{-1}(y)\end{aligned}$$

مستمر ومتزايد تمامًا وبالتالي:

$x=f^{-1}(y)\xrightarrow[y\to y_0]{} f^{-1}(y_0)=x_0$ أي أن $y\to y_0 \Rightarrow x\to x_0$.

وبالتالي حسب التعريف فإن:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\right)$$

$$=\frac{1}{f'(x_0)}$$

وحيث $f'(x_0)\neq 0$ فالنهاية موجودة ومنه $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

ونستنتج أن $(f^{-1})'(y_0)\neq 0$ أيضًا وأن $f'(x_0)=\frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$

5.3 – القيم الحدية (العظمى والصغرى):

1.5.3 – تعاريف: ليكن:

$$\begin{aligned} f:I\subseteq\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longrightarrow y=f(x)\end{aligned}$$

معرفًا على I ولتكن $x_0\in I$.

نقول أن للتابع f قيمة عظمى مطلقة عند النقطة x_0 إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\forall x\in I: f(x)\le f(x_0)$$

ونقول أن لـ f قيمة صغرى مطلقة عند النقطة x_0 إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\forall x\in I: f(x)\ge f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بصورة مطلقة ودون أي قيد على $x\in I$.

ونقول أن للتابع f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\exists\delta_1>0: |x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$$

أي أنه يوجد مجال $L=]x_0-\delta_1,x_0+\delta_1[$ مركزه x_0 ويتحقق عليه الشرط السابق من أجل كل $x\in L$.

ونقول أن لـ f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) عند x_0 إذا (⇔) تحقق الشرط:

$$\exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

أي أن الشرط يتحقق بالنسبة لتلك العناصر x القريبة من x_0 فقط.

ونسمي $f(x_0)$ قيمة هذه القيمة العظمى أو الصغرى عند x_0، فالقيمة العظمى المطلقة أو النسبية أو القيمة الصغرى المطلقة أو النسبية $f(x_0)$ هي قيمة من قيم $f(x)$.

مثال: ليكن:

$$f : I = [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^4 - x^5$$

باستعمال جدول للتغيرات نحصل على:

x	-2		0		$\frac{4}{5}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	48	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{4}{5}\right)^5$	$\searrow$	-16

فنرى أن:

$$\forall x \in [-2,2] : f(x) \leq f(-2) = 48$$
$$f(x) \geq f(2) = -16$$

إذن f يقبل قيمة عظمى مطلقة عند $x_0 = -2$ ويقبل قيمة صغرى مطلقة عند $x_0 = 2$.

وعندما يكون x قريبا من $x_0 = 0$، أي عندما $\exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta$، أي يوجد مجال مركزه (0): $]-\delta, \delta[\subset I$.

مثلا $\delta = \frac{1}{2}$ فإن: $f(x) \geq f(0) = 0$.

ومنه f يقبل قيمة صغرى نسبية عند $x_0 = 0$.

وعندما يكون x قريبا من $x_0 = \frac{4}{5}$ أي $\exists \delta > 0 : \left|x - \frac{4}{5}\right| < \delta$.

أي يوجد مجال من الشكل $\left]\frac{4}{5} - \delta, \frac{4}{5} + \delta\right[$ مركزه $\frac{4}{5}$.

مثلا $\delta = \frac{1}{5}$ فإن: $f(x) \leq f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^5$. ومنه f يقبل قيمة عظمى نسبية عند $x_0 = \frac{4}{5}$.

ملاحظة: لاحظ أنه لا يوجد مجال مفتوح مركزه (2) أو (-2) أي:

$L_1 =]2-\delta, 2+\delta[$ و $L_2 =]-2-\delta, -2+\delta[$ يحققان:

$L_1 \subset I$ و $L_2 \subset I$ أي أن: $L_1 \not\subset I$ و $L_2 \not\subset I$ لأن:

$$\begin{cases} \forall \delta > 0 : 2 < 2 + \delta \\ \forall \delta > 0 : -2 - \delta < -2 \end{cases}$$

يمكن التعرف على القيم الحدية بطريقة أخرى:

إذا كان f معرفاً على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ووجد المشتق على يمين a أي $f'(a+0)$ ووجد المشتق على يسار b أي $f'(b-0)$ فإنه لدينا ما يلي:

لـf قيمة عظمى نسبية عند a إذا كان: $f'(a+0) < 0$

لـf قيمة عظمى نسبية عند b إذا كان: $f'(b-0) > 0$

لـf قيمة صغرى نسبية عند a إذا كان: $f'(a+0) > 0$

لـf قيمة صغرى نسبية عند b إذا كان: $f'(b-0) < 0$

وعمومًا لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى لتابع f فإننا نعين من أجل ذلك تلك النقاط x حيث:

أ• ينعدم المشتق

ب• لا يوجد المشتق

ج• يكون مجال تعريف التابع f نصف مفتوح.

إن هذه هي قيم المتغير x المرشحة كي تكون لـ f قيمة حدية (عظمى أو صغرى) نسمي هذه النقاط x بالنقاط الحرجة لبلوغ f قيمة حدية، ولكي نقرر أيُّ هذه النقاط تعطى قيم حدية (عظمى أو صغرى) علينا أن نقارن قيم f في هذه النقط مع بعضها ومع حلول النقط المجاورة.

مثال: ليكن:

$$f:[-3,3]\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=\left|4-x^2\right|$$

أوجد القيم العظمى والصغرى النسبية والمطلقة إن وجدت:

الحل: لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 : |x|\le 2\\ x^2-4 : 2<|x|\le 3\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2x : x\in[-2,2]\\ 2x \ : x\in[-3,-2[\cup]2,3]\end{cases}$$

فالنقاط الحرجة هي إذن:

أ• $x=0$ حيث ينعدم المشتق

ب• $x=\pm 2$ حيث المشتق غير موجود لأن:

$$f'(2-0)=-4\neq f'(2+0)=4$$
$$f'(-2-0)=-4\neq f'(-2+0)=4$$

ج• $x=\pm 3$ طرفا مجال التعريف لـ f.

إن قيم f الموافقة هي:

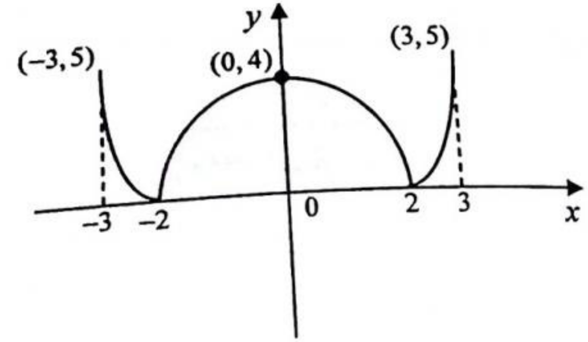
$$f(0)=4\ ,\ f(2)=f(-2)=0\ ,\ f(3)=f(-3)=5$$

وهناك قيم صغرى نسبية ومطلقة عند $x=\pm 2$

وقيم عظمى نسبية ومطلقة عند $x=\pm 3$

وهناك قيمة عظمى نسبية وليست مطلقة عند $x=0$.

ويمكن الحصول على كل هذه النتائج من جدول التغيرات للتابع f وحيث $f(x)\ge 0$ فإن بيانه هو:



ملاحظة: يجب عدم الخلط بين القيمة العظمى لتابع f والحد الأعلى له وبين القيمة الصغرى لتابع f والحد الأدنى له.

فمثلا: إذا كان $f:]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ معرفًا بـ: $f(x)=2x$ فإنه:

وبالتالي: $\forall x\in]1,2[:\ 1<x<2 \Leftrightarrow 2<2x<4 \Leftrightarrow 2<f(x)<4$

$$\inf_{x\in]1,2[} f(x)=2 \quad و \quad \sup_{x\in]1,2[} f(x)=4$$

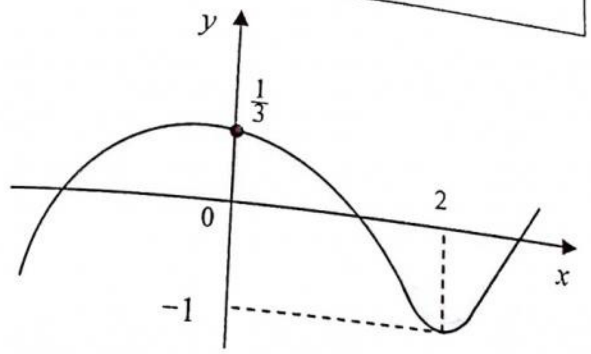
ولكن لا توجد قيمة عظمى ولا قيمة صغرى لـ f على $]1,2[$.

مثال آخر: إذا كان:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow \frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$$

فإن:
$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



فهناك قيمة عظمى نسبية لـــ f عند النقطة $x_0=0$ وقيمتها $f(0)=\frac{1}{3}$ وهنا قيمة صغرى نسبية عند $x_0=2$ وقيمتها $f(2)=-1$ ، ورغم ذلك فليس لـ حد أعلى أو حد أدنى. أي: $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ و $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ غير موجودين.

2.5.3 - نظرية: ليكن $f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

إذا كان f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ وكان لـــ f نهاية عظمى نسبية (أو صغ نسبية) عند $x_0\in]a,b[$ فإن: $f'(x_0)=0$.

(مع ملاحظة أن x_0 نقطة داخلية من المجال $[a,b]$ أي $a<x_0<b$)

البرهان: نفرض أن f يملك نهاية صغرى نسبية عند x_0 (ونبرهن بنفس الطريقة عندما يكون لـــ f نهاية عظمى نسبية) إذن:

$$\exists\delta>0,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)$$
$$\forall x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\ \Rightarrow f(x)-f(x_0)\geq 0$$

وبالتالي فإن:

$$(13)\ \ldots\ldots\ f'(x_0+0)=\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\quad (x-x_0>0 \text{ لأن})$$

$$(14)\ \ldots\ldots\ f'(x_0-0)=\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\quad (x-x_0<0 \text{ لأن})$$

وحيث f يقبل الاشتقاق عند x_0 فإن المشتقين $f'(x_0+0)$ و $f'(x_0-0)$ موجودان ويحققان:

$$f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$$

وبالتالي فإن:

$f'(x_0)\geq 0$ حسب (13) و $f'(x_0)\leq 0$ حسب (14)

ومنه $f'(x_0)=0$.

ملاحظة هامة: نحذر القارئ من أن يرى في النظرية أكثر مما تنص عليه، فهي لا تقول ماذا يحدث إذا ظهرت قيمة عظمى أو صغرى في الحالات التالية:

أ. عند نقطة x_0 حيث لا يوجد مشتق عند x_0.

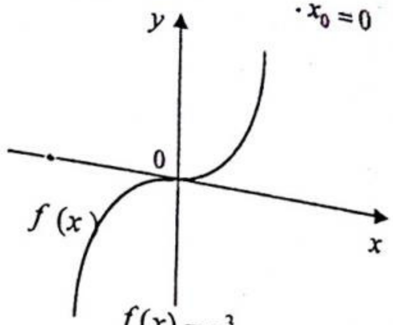
مثلا: $f(x)=|x|$ يقبل نهاية صغرى عند $x_0=0$ دون أن يقبل مشتقا عند $x_0=0$.

ب. عند طرفي المجال $[a,b]$ المعرف عليه f.

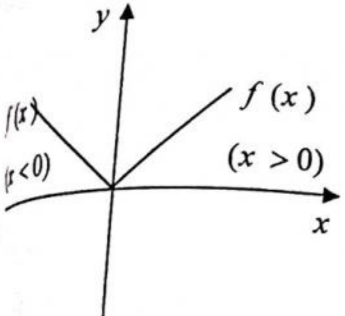
مثلا: التابع المذكور في المثال بعد 1.5.3 مباشرة له قيمة عظمى عند $x_0=-2$ ولكن $f'(-2)\neq 0$.

كما أن النظرية لا تقول أنه يلزم أن يكون للتابع قيمة عظمى أو قيمة صغرى في كل نقطة ينعدم عندها المشتق.

مثلا: $f(x)=x^3$ فإن $f'(0)=0$ دون وجود قيمة عظمى أو صغرى عند $x_0=0$.



$f(x)=x^3$



$f(x)=|x|$

3.5.3 – نظرية رول (Rolle):

ليكن: $f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث يكون:

1• f مستمرًا على $[a,b]$

2• f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

3• $f(a)=f(b)$

عندئذ توجد نقطة $c\in]a,b[$ تحقق $f'(c)=0$

البرهان:

أ) إذا كان f ثابتا على I: $\forall x\in I: f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$

فإن $f'(x)=0$ وبالتالي كل نقطة $c\in I$ تحقق المطلوب.

ب) نفرض الآن أن f غير ثابت على I، عندئذ كون f مستمر على المجال المغلق والمحدود I فإن f يبلغ حديه الأعلى والأدنى على I. أي:

$$\exists x_0,x_1\in[a,b]:\ f(x_0)=\inf_{x\in I}f(x)=m\ ,\ f(x_1)=\sup_{x\in I}f(x)=M$$

عندئذ أحد الحدين M أو m يخالف القيمة $f(a)=f(b)$ لأنه لو كان $f(a)=f(b)=m=M$ لأصبح f ثابتاً.

لنفرض أن $f(a)=f(b)\neq m$ عندئذ: $\exists x_0\in]a,b[: f(x_0)=m$

وتكون m نهاية صغرى نسبية (حسب التعريف 1.5.3).

وحيث f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$ فإن $f'(x_0)$ موجود، إذن حسب النظرية 2.5.3 فإن $f'(x_0)=0$، أي توجد $c=x_0\in[a,b]$ تحقق المطلوب.

حالة خاصة: إذا كان $f(a)=f(b)=0$ أي a و b جذران للمعادلة $f(x)=0$، فإن نظرية رول في هذه الحالة تعني أنه بين كل جذرين a و b للمعادلة $f(x)=0$، يوجد جذر c على الأقل للمعادلة $f'(x)=0$.

مثال: برهن أن المعادلة $x^3+x+5=0$ تقبل جذرًا حقيقيًا واحدًا (الجذران الآخران عقديان).

الحل: بأخذ $f(x)=x^3+x+5$ نرى أن f يحقق الشرطين (1) و (2) من نظرية رول على أي مجال $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ وأنه:

$$\forall x\in[a,b]: f'(x)=3x^2+1>0$$

أي $f'(x)\neq 0$ (تذكر أن $A\Rightarrow B$ تكافئ $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$). إذن للمعادلة $f(x)=0$ جذر حقيقي واحد على الأكثر. (لأنه لو كان لـ $f(x)=0$ جذران لوُجِدَ جذرًا لـ $f'(x_0)=0$). وحيث أن f يغير إشارته من السالب إلى الموجب (مثلا: $f(-2)f(1)<0$) فإن بيان f يقطع المحور ox على الأقل مرة أي $f(x)=0$ لها على الأقل جذر حقيقي وبأخذ التقاطع بين الجوابين:

على الأكثر يوجد حل وعلى الأقل يوجد حل للمعادلة $f(x)=0$ فـإن لـ $f(x)=0$ حل حقيقي واحد فقط.

ملاحظة: إن عكس الحالة الخاصة من نظرية رول ليس صحيحًا.

فمثلاً $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=x^2+1\neq 0$ ورغم ذلك فإن:

$$f'(x)=2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

أي أن وجود جذور لـ $f'(x_0)=0$ لا يعني وجود جذور لـ $f(x)$.

4.5.3 - نظرية التزايدات المنتهية:

ليكن $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث يكون:

1• f مستمر على $[a,b]$

2• f يقبل الاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ توجد نقطة $c\in]a,b[$ تحقق:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

البرهان: نعتبر التابع المساعد:

$$\varphi: I\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

فنرى أن φ يحقق كل شروط نظرية رول على I. ومنه توجد $c\in]a,b[$ تحقق $\varphi'(c)=0$.

وحيث: $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ أي:

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ومنه المطلوب.

نتيجة 01: إذا كان $x_0\in I$ مثبت فإنه:

$$\forall x\in I : \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)$$

حيث c عدد محصور تمامًا بين x_0 و x.

فإذا كانت $\forall x\in I : f'(x)=0$ فإن:

$$\forall c\in]a,b[: f'(c)=0$$

ومنه:

$$\forall x\in I : f(x)=f(x_0)$$

أي أن f ثابت على $I=[a,b]$.

ملاحظة: إن انعدام المشتق لا يؤدي بالضرورة إلى أن f ثابت ما لم يكن f مستمرًا.

مثلا: ليكن:

$$g:]0,1[\cup]2,3[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\begin{cases}1 : x\in]0,1[\\ -1 : x\in]2,3[\end{cases}$$

إن $g'(x)=0$ ورغم ذلك فإن g ليس ثابتًا لأنه غير مستمر.

نتيجة 02: إذا كان $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ مستمرًا وقابلاً للاشتقاق على $]a,b[$

عندئذ:

إذا كان $\forall x\in]a,b[: f'(x)>0$ فإن f متزايد على $[a,b]$

إذا كان $\forall x\in]a,b[: f'(x)<0$ فإن f متناقص على $[a,b]$

لأنه إذا كان $x_1,x_2\in[a,b]$ بحيث $x_1<x_2$ (وبنفس الطريقة لما $x_2<x_1$).

عندئذ نظرية التزايدات المنتهية على $[x_1,x_2]$ تعطي:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\quad c\in\left]x_1,x_2\right[$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

وحيث $x_2-x_1>0$ فإن إشارة $f(x_2)-f(x_1)$ من نفس إشارة $f'(c)$.

5.5.3 – نظرية التزايدات المعممة:

ليكن التابعان $f,g:I=[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث:

•1 g و f مستمران على I

•2 g و f يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$

•3 $\forall x\in\left]a,b\right[:g'(x)\neq 0$

عندئذ يوجد $c\in\left]a,b\right[$ يحقق:

$$(15)\;\cdots\cdots\;\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

البرهان: إن $g(b)\neq g(a)$ لأنه لو كان $g(b)=g(a)$ لأصبح g يحقق ك

شروط نظرية رول على $[a,b]$ ومنه يوجد $c\in\left]a,b\right[$ بحيث $g'(c)=0$

وهذا يُناقض كون $\forall x\in\left]a,b\right[:g'(x)\neq 0$ وبالتالي وحيث $g'(c)\neq 0$ فإ

طرفي العبارة (15) موجودان.

لنعتبر الآن التابع المساعد المعرف كما يلي:

$$\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longrightarrow\varphi(x)=f(x)-f(a)-\big(g(x)-g(a)\big)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

فنرى أن φ يحقق جميع شروط نظرية رول ومنه يوجد $c\in\left]a,b\right[$ يحقق:

$$\varphi'(c)=0$$

ولكن:

$$\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

إذن:

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-g'(c)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ومنه:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ملاحظة: نلاحظ أنه بوضع $g(x)=x$ في نظرية التزايدات المعممة، تنتج نظرية التزايدات المنتهية وبوضع $f(b)=f(a)$ في نظرية التزايدات المنتهية تنتج نظرية رول ومنه فإن التزايدات المعممة هي تعميم لنظرية التزايدات المنتهية والتي هي بدورها تعميم لنظرية رول. ومنه نظرية التزايدات المعممة هي تعميم لنظرية رول.

6.3 – دراسة حالة عدم التعيين $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$:

1.6.3 – نظرية (قاعدة لوبيتال):

ليكن التابعان $f,g:\left]a,b\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث الشروط التالية محققة:

•1 $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}g(x)=0$

•2 f,g يقبلان الاشتقاق على $]a,b[$

•3 $\forall x\in\left]a,b\right[:g'(x)\neq 0$

•4 النهاية: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ موجودة حيث $k\in[-\infty,+\infty]$ عندئذ تكون:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

البرهان: نمدد استمرار f و g على يمين a وذلك بوضع:

$$g(a)=\lim_{x \xrightarrow{>} a} g(x)=0$$

$$f(a)=\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x)=0$$

ومن أجل $x\in[a,b[$ يصبح f و g يحققان شروط نظرية التزايدات المنتهية (5.5.3) على المجال $I=[a,x[$.

وبالتالي يوجد $c\in]a,x[$ يحقق:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

وحيث $a<c<x$ فإنه لما $x \xrightarrow{>} a$ فإن $c \xrightarrow{>} a$.

وبالتالي فإن:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c \xrightarrow{>} a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x \xrightarrow{>} a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

ملاحظات:

1• ندرس الحالة لما $x \xrightarrow{<} b$ بطريقة مشابهة، أو عندما $x\to x_0$ حيث $x_0\in]a,b[$.

2• إذا كانت $\lim_{x \xrightarrow{>} a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$ فنطبق نظرية لوبيتـــال من جديـد على f' و g' أي أنه يمكن تطبيق النظرية عدة مرات متتالية في حالة توفر شروطها.

3• تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x \xrightarrow{>} a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

4• تبقى النظرية صحيحة في حالة $\lim_{x\to\infty} f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to\infty} g(x)=0$

ونضع في هذه الحالة: $t=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{t}$

ولما $x\to\infty$ فإن $t\to 0$ ويكون:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{t\to 0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0$$

وبهذا نعود للحالة الأولى للنظرية، لأنه يكون في هذه الحالة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{-1}{t^2}\right)f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{-1}{t^2}\right)g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

5• يتم إيجاد النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندما تكون حالة عدم تعيين بتطبيق قاعدة لوبيتال إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة حسب النظرية.

أما إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة فإن هذا لا يعني إطلاقًا أن النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة.

مثلا: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$ $\left(\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\right)$

في حين أن النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\cos x}{1}\right)$$

غير موجودة.

مثال: لحساب النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}$$

نرى أنه بأخذ $f(x)=1-\cos x$ و $g(x)=\sin x$.

فإن $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

فنختار أي مجال $]a,b[$ تتحقق عليه جميع شروط نظرية لوبيتال ويشمل النقطة (0).

فلو أخذنا مثلا المجال $\left]\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ نرى أن جميع شروط النظرية محققة عليه.

وأن:

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{1}=0$$

إذن:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0$$

- يمكن ردّ الحالتين $0\cdot\infty$ و $\infty-\infty$ لعدم التعيين إلى الحالتين $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق النظرية.

مثال: لحساب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$.

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=\infty-\infty$ لذا نكتب:

$$\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x=\frac{1-\sin}{\cos x}\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{}\frac{0}{0}$$

وعليه نأخذ $f(x)=1-\sin x$ و $g(x)=\cos x$.

ونطبق النظرية على $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ مثلا لأن $g'(x)\neq0$ على هذا المجال وبقية الشروط محققة عليه. وحيث:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\xrightarrow{>}\frac{\pi}{2}}\frac{+\cos}{-\sin x}=\frac{0}{-1}=0$$

إذن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=0$.

- يمكن ردّ حالات عدم التعيين 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 إلى الحالة $0\cdot\infty$ وبالتالي إلى $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وذلك باستعمال العلاقة $y^x=e^{x\log y}$ (سنقدم التابع log لاحقا).

مثال: لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ ، حيث k عدد ثابت.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=1^{+\infty}$ فنكتب:

$$\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^{x\log\left(1+\frac{k}{x}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}e^{+\infty\cdot0}$$

ونطبق النظرية على $f(x)=\log\left(1+\frac{k}{x}\right)$ و $g(x)=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac{k}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{k}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-k}{x^2}}{1+\frac{k}{x}}\right)}{\frac{-1}{x^2}}=k$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

مثال: أحسب $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{2x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ فإن $g(x)=2x^2$ و $f(x)=1+x-e^x$

الحل: نعتبر f و g في المجال ... على f و g نطبق نظرية لوبيتال 1.6.3 على

حالة عدم تعيين لإزالتها نطبق نظرية لوبيتال ... ويحقق شروط

$I=]0,1[$ ، - مثلا - أو أي مجال آخر تظهر فيه $x_0=0$

النظرية فنجد أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{0}{0}$$

فنطبق النظرية من جديد على f' و g' و I ونجد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{4}=\frac{-1}{4}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-1}{4}$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{4}$.

ملاحظة: الحالات التالية لا تمثل حالات عدم تعيين:

•1 إذا كان $a\in\mathbb{R}$ فإن $a+(+\infty)=+\infty\ ;\ a-(+\infty)=-\infty$

•2 $a\cdot(+\infty)=+\infty$ عندما $a>0$ و $a\cdot(+\infty)=-\infty$ عندما $a<0$

•3 $a\cdot(-\infty)=-\infty$ عندما $a>0$ و $a\cdot(-\infty)=+\infty$ عندما $a<0$

•4 $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ و $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

•5 $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$