

Chapitre 05 : Vérification des contraintes

5.1. Introduction :

La vérification des contraintes dans la précontrainte est une étape essentielle pour garantir la sécurité, la durabilité et le bon comportement des structures en béton précontraint. Elle consiste à vérifier que les contraintes dans le béton et les armatures de précontrainte restent inférieures aux limites admissibles définies par les normes.

Les vérifications des contraintes dans le béton précontraint sont classées selon des critères définis par les normes (Eurocode 2, BAEL, etc.) pour garantir la durabilité, la sécurité et la performance de la structure.

5.2. Diagramme de vérification

Soit une poutre de section en T soumise à une force de précontrainte, dont les caractéristiques sont données à la figure ci-dessous.

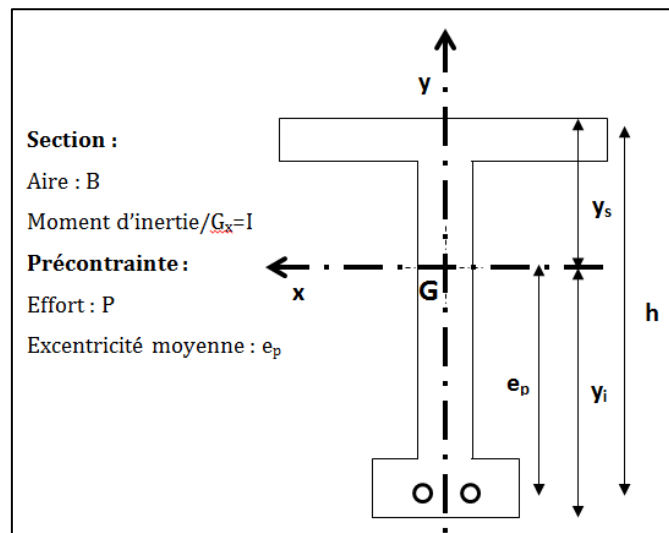


Figure 5.1. Poutre de section en T

Les règles de dimensionnement de la poutre utilisent essentiellement les notions liées à la présence des sollicitations de la flexion composée.

5.2.1. Noyau limite d'une section droite :

A. Centre de pression

La mise en place des câbles de précontrainte permettant de réduire largement les déformations flexionnelles dues aux sollicitations de traction. En effet, l'excentricité « e_0 » de la force de précontrainte (au-dessous de centre de gravité de la poutre) peut créer par la suite une excentricité finale « e » avec l'ajout de moment « M_f » (Figure 5.2). La résultante de la force de précontrainte ainsi que le moment de flexion est appliquée en point appelé « centre de pression » d'ordonnée:

$$Pe = Pe_0 + M_f \quad (\text{Eq. 5.1})$$

L'excentricité finale peut être déduite par l'utilisation de l'équation suivante :

$$e = e_0 + \frac{M_f}{P} \quad (\text{Eq. 5.2})$$

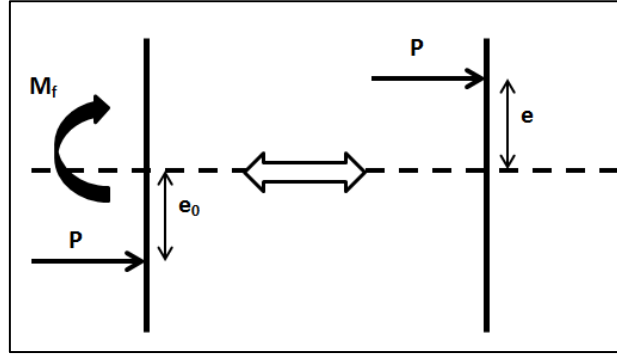


Figure. 5.2. Centre de pression d'un élément soumis à la précontrainte

5.3. Noyau limite

La contrainte dans une fibre d'ordonnée « y » s'écrit en valeur algébrique, sous la forme suivante :

$$\sigma_{(y)} = \frac{P}{B} + \frac{Pe_0 y}{I} + \frac{M_f y}{I} \quad (\text{Eq.5.3})$$

Puisque le rendement :

$$\rho = \frac{I}{By_s y_i} \quad (\text{Eq.5.4})$$

$$\text{Et : } I = \rho B y_s y_i \quad (\text{Eq.5.5})$$

L'équation suivante (Eq.5.6) est obtenue par le remplacement de l'équation (Eq.5.5) et l'équation (Eq.5.2) dans l'équation (Eq.5.3) :

$$\begin{aligned} \sigma_{(y)} &= \frac{P}{B} + P \left(e_0 + \frac{M_f}{P} \right) \frac{y}{I} = \frac{P}{B} + P(e) \frac{y}{I} = \frac{P}{B} + P(e) \frac{y}{\rho B y_s y_i} \\ \sigma_{(y)} &= \frac{P}{B} \left(1 + \frac{ey}{\rho y_s y_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{Eq.5.6})$$

La contrainte finale due à la force de précontrainte et au chargement externe est donnée par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_t \leq \sigma_y \leq \bar{\sigma}_c \quad (\text{Eq.5.7})$$

Avec

$\bar{\sigma}_t$: La contrainte limite de traction

$\bar{\sigma}_c$: La contrainte limite de compression.

Pour $y = +y_s$, le remplacement de ce paramètre dans les équations (Eq.5.6 et Eq.5.7.), l'équation suivante est obtenu :

$$\sigma_{s1} \leq \frac{P}{B} \left(1 + \frac{e}{\rho y_i} \right) \leq \sigma_{s2} \quad (\text{Eq.5.8})$$

Ou : σ_{s1} : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et un moment fléchissant minimum (M_m), σ_{s2} : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et Moment fléchissant Maximum (M_M).

Pour $y = -y_i$, le remplacement de ce paramètre dans les équations (Eq.5.6 et Eq.5.7.), l'équation suivante est obtenu :

$$\sigma_{i2} \leq \frac{P}{B} \left(1 - \frac{e}{\rho y_s} \right) \leq \sigma_{i1} \quad (\text{Eq.5.9})$$

Ou : σ_{i1} : la contrainte limite à la fibre inférieure sous une charge P et un Moment fléchissant minimum (M_m), σ_{i2} : la contrainte limite à la fibre supérieure sous une charge P et Moment fléchissant Maximum (M_M) (Figure 5.3).

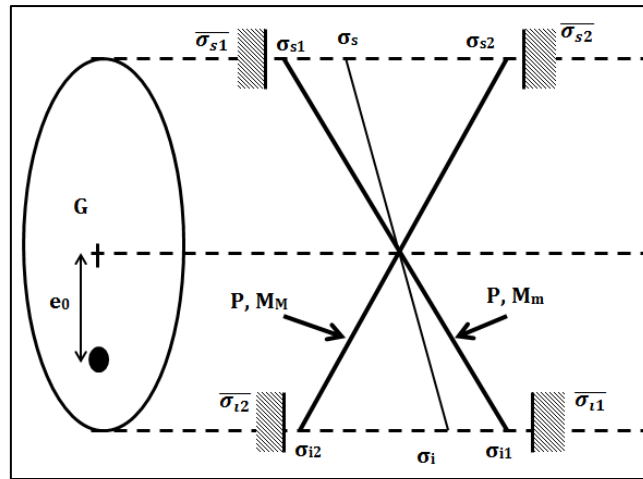


Figure. 5.3. Contraintes et contraintes limites dans une section

L'égalité des équations (Eq.5.8) et (Eq.5.9) donne l'équation (Eq.5.10) et (Eq.5.11)

$$-\rho y_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P} \right) \leq e \leq \rho y_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1 \right) \quad (\text{Eq.5.10})$$

$$-\rho y_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1 \right) \leq e \leq \rho y_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P} \right) \quad (\text{Eq.5.11})$$

Si on pose que :

$$\bullet \quad C_i = \rho y_s \left(\frac{\sigma_{i1} B}{P} - 1 \right) \quad (\text{Eq.5.12})$$

$$\bullet \quad C_s = \rho y_i \left(\frac{\sigma_{s2} B}{P} - 1 \right) \quad (\text{Eq.5.13})$$

$$\bullet \quad -T_i = -\rho y_i \left(1 - \frac{\sigma_{s1} B}{P} \right) \quad (\text{Eq.5.14})$$

$$\bullet \quad T_s = \rho y_s \left(1 - \frac{\sigma_{i2} B}{P} \right) \quad (\text{Eq.5.15})$$

Ou :

- Le segment $[-C_i, C_s]$: présente le noyau limite (fuseau de passage) de Compression
- Le segment $[-T_i, T_s]$: présente le noyau limite (fuseau de passage) de Traction

- Le segment $[-S_i, S_s] = [-C_i, C_s] \cap -[T_i, T_s]$: présente le noyau limite au sens Strict.

Le remplacement de l'équation (Eq.5.2) dans les équations (Eq.5.11 et Eq. 5.14), on obtient les équations suivantes :

$$e_0 \geq -T_i - \frac{M_m}{P} \quad (\text{Eq. 5.16})$$

$$e_0 \leq T_s - \frac{M_M}{P} \quad (\text{Eq. 5.17})$$

Alors, l'excentricité de câble moyen fictif et la ligne de pression doivent être comprises entre les deux bornes selon l'équation suivante :

$$-T_i - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq T_s - \frac{M_M}{P} \quad (\text{Eq. 5.18})$$

5.5. Notion des sections critique

Pour qu'une précontrainte soit applicable à un élément structural, deux conditions fondamentales doivent être satisfaites :

- **La présence d'un segment de passage** : zone où doit s'exercer la force de précontrainte pour garantir l'équilibre des contraintes.
- **Un enrobage adéquat** : protection minimale requise pour les câbles de précontrainte, assurant durabilité et résistance aux agressions extérieures.

5.5.1. Section sous critique :

Une section est qualifiée de **sous-critique** si l'ensemble des segments de passage (zones où s'applique la précontrainte) se situe entièrement à l'intérieur de la zone autorisée, garantissant ainsi un **enrobage suffisant** des câbles (Figure 5.4).

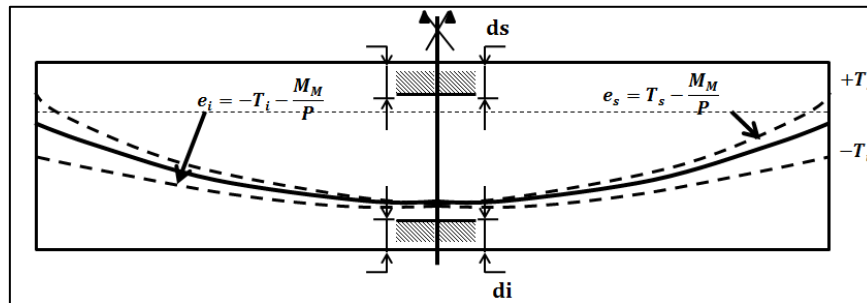


Figure. 5.4. Fuseau de passage pour une section critique et une sous-critique

5.5.2. Section critique

La section est dite **critique** lorsque le segment de passage se réduit théoriquement à un seul point. Cette situation limite marque la frontière entre une configuration acceptable et inacceptable en termes de stabilité et de respect des normes d'enrobage (Figure 5.4).

5.5.3. Section sur-critique

Une section est **sur-critique** si l'une des extrémités du segment de passage dépasse la zone d'enrobage autorisée, créant ainsi un segment ouvert. Cette configuration compromet la protection des câbles et la durabilité de la structure (Figure.5.5).

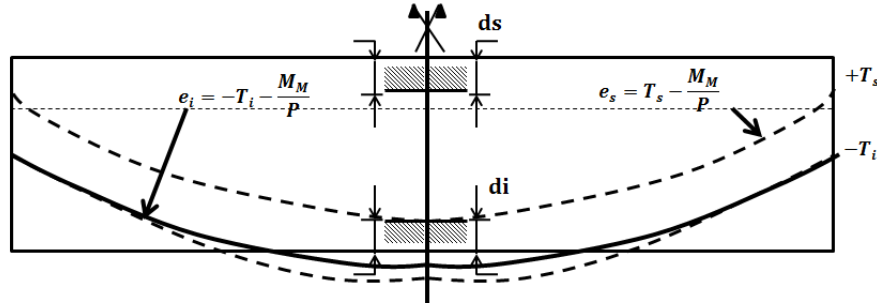


Figure. 5.5. Fuseau de passage pour une section sur-critique.

5. 6.Evaluation de la précontrainte

5.6.1. Cas d'une section critique et sous critique :

Pour la section critique et sous critique, le segment de passage est limité à un point selon l'équation suivante : (voir Figure 5.4)

$$-T_i - \frac{M_m}{P_I} = e_0 = T_s - \frac{M_M}{P_I} \quad (\text{Eq.5.19})$$

La force de précontrainte P_I peut être déduite :

$$P_I = \frac{M_M - M_m}{T_s + T_i} = \frac{\Delta M}{T_s + T_i} \quad (\text{Eq.5.20})$$

On remplace les équations (Eq.5.14 et Eq. 5.15) dans l'équation (Eq.5.20) pour trouver l'équation (Eq.5.20)

$$P_I = \frac{\Delta M + \rho B (y_s \sigma_{i2} + y_i \sigma_{s1})}{\rho h} \quad (\text{Eq.5.21})$$

En plus, puisque: $B = \frac{I}{\rho y_s y_i}$, on obtient l'équation suivante:

$$P_I = \frac{\Delta M + \frac{I}{y_i} \sigma_{i2} + \frac{I}{y_i} \sigma_{s1}}{\rho h} \quad (\text{Eq.5.22})$$

5.6.2. Cas d'une section sur critique :

A. Moment positif M_M : Voir Figure 5.5 et équation 5.19

$$e_0 = T_s - \frac{M_M}{P_{II}} = -(y_i - di) \quad (\text{Eq.5.23})$$

D'ou on tire la valeur de P_{II} par l'équation suivante :

$$P_{II} = \frac{M_M}{T_s + y_i - di} \quad (\text{Eq.5.24})$$

De même:

$$P_{II} = \frac{M_M + \frac{I}{y_i} \sigma_{i2}}{y_i + \rho y_s - di} \quad (\text{Eq.5.25})$$

B. Moment négatif M_m : Voir Figure 5.5 et équation 5.19

$$e_0 = -T_i - \frac{M_m}{P_{II}} = (y_s - ds) \quad (\text{Eq.5.26})$$

D'ou on tire la valeur de P_{II} par l'équation suivante :

$$P_{II} = \frac{-M_m}{T_i + y_s - d_s} \quad (\text{Eq.5.27})$$

De même:

$$P_{II} = \frac{-M_m + \frac{I}{y_s} \sigma_{s1}}{y_s + \rho y_i - d_s} \quad (\text{Eq.5.28})$$

Remarque :

- La section est considérée sous critique pour $P_I > P_{II}$, et sur critique pour $P_I < P_{II}$
- Si $\sigma_{s1} = \sigma_{i2} = 0$ d'où :
 - $T_s = \rho y_s$ et $T_i = \rho y_i$
 - $P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$ pour une section sous critique
 - $P_{II} = \frac{M_M}{y_i + \rho y_s - d_i}$ pour une section sur critique avec un moment positif
 - $P_{II} = \frac{-M_m}{y_s + \rho y_i - d_s}$ pour une section sur critique avec un moment négatif

5.7. Section minimale du béton :

La section minimale de béton est atteinte lorsque les contraintes de compression induites) dans le matériau égalent les contraintes limites admissibles. Cette approche garantit une utilisation optimale du béton, sans dépasser sa capacité portante.

5.7.1. Cas d'une section sous critique :

On prend alors $P = P_I$ et l'on atteint les deux contraintes limites de traction $\overline{\sigma}_{s1}$ et $\overline{\sigma}_{i2}$. Pour obtenir les deux contraintes limites de compression, il faut et il suffit que les variations de contrainte sur la fibre supérieure ($\Delta\sigma = \Delta M \frac{y}{I}$) et sur la fibre inférieure ($\Delta\sigma = \Delta M \frac{y}{I}$), d'où :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s} \quad (\text{Eq.5.29})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i} \quad (\text{Eq.5.30})$$

5.7.2. Cas d'une section sur critique :

A. Moment positif :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{\rho P h}{\sigma_{s2} - \frac{y_s}{y_i} \sigma_{i2}} \quad (\text{Eq.5.31})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_i} \quad (\text{Eq.5.32})$$

B. Moment négatif :

$$\frac{I}{y_s} \geq \frac{M_M - M_m}{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma_s} \quad (\text{Eq.5.33})$$

$$\frac{I}{y_i} \geq \frac{\rho P h}{\sigma_{i1} - \frac{y_i}{s} \sigma_{s1}} \quad (\text{Eq.5.34})$$