الفصل 4: التحريك الدوراني

مقدمة

تصنف عموما حركة الاجسام الى نوعين :

- أجسام تتحرك في خطوط مستقيمه وتشتمل دراستها علي كميات فيزيائية كالقوة والكتلة والسرعة ومعدل التسارع والإزاحة.
- أجسام تتحرك في مسار منحني وتشتمل علي كميات فيزيائية مثل العزم الدوراني والسرعة الزاوية وعزم العطالة الذاتي والازاحة الزاوية.

5 - **العزم الحركي :** Moment cinétique

5-أ - عزم القوة : Moment d'une force

يعبر عن مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم حول محور الدوران.

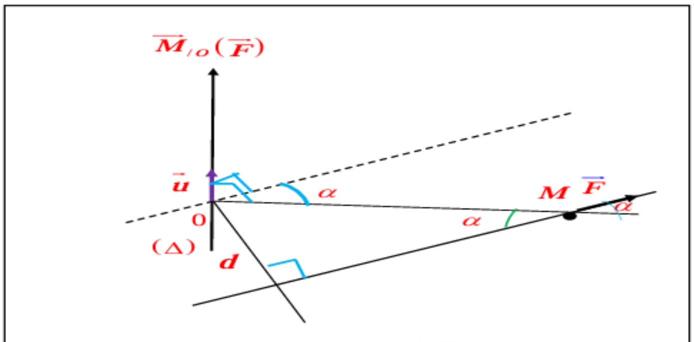
مثال: القوة المبذولة عند فتح الباب، فتح صنبور الماء، ربط صامولة بمفتاح الربط. (إذا أردت جعل الجسم يدور فأنت تستخدم عزم القوة لأنه مسبب للدوران) .

5-ب - عزم القوة بالنسبة لمحور (Δ) **:**

ليكن المحور (Δ) ، شعاع وحدته $\vec{u}$. (Δ)و $\vec{u}$ لهما نفس الاتجاه و لتكن (O)نقطة من المحور (Δ). نسمي عزم القوة المطبق في النقطة M بالنسبة للمحور (Δ)المقدار السلمي:

$$\boxed{M_{/\Delta}(\vec{F})=M_{/0}(\vec{F}).\vec{u}}\;...........(25.IV)$$

5-ج - عزم القوة بالنسبة لنقطة (O) **:** عزم القوة $\vec{F}$ المطبقة على النقطة M بالنسبة الى النقطة (O) **الشكل (14.IV)**يكون معرف كما يلي:



الشكل (14.IV)

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{/0}(\vec{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} \\ \left\|M_{/0}(\vec{F})\right\|=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|.\left\|\vec{F}\right\|.\text{Sin}\,\alpha=d.\left\|\vec{F}\right\| \end{array}}\;...........(26.IV)$$

$M_{/0}(\vec{F})$: يمثل عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة (O) .

نظرية العزم الحركي (الدفع الزاوي)

الدفع الزاوي لنقطة مادية بالنسبة للنقطة O هو عزم كمية الحركة لهذه النقطة بالنسبة لنفس النقطة O في المعلم $\mathcal{R}$

العزم الحركي هو عبارة عن الجداء الشعاعي لشعاع الموضع وشعاع كمية الحركة، وبالتالي فهو شعاع عمودي على كل من شعاع الموضع وشعاع السرعة، فهو شعاع عمودي على مسار النقطة المادية M، الشكل(9.4).

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/R}}$$

يكتب مشتق الدفع الزاوي كما يلي:

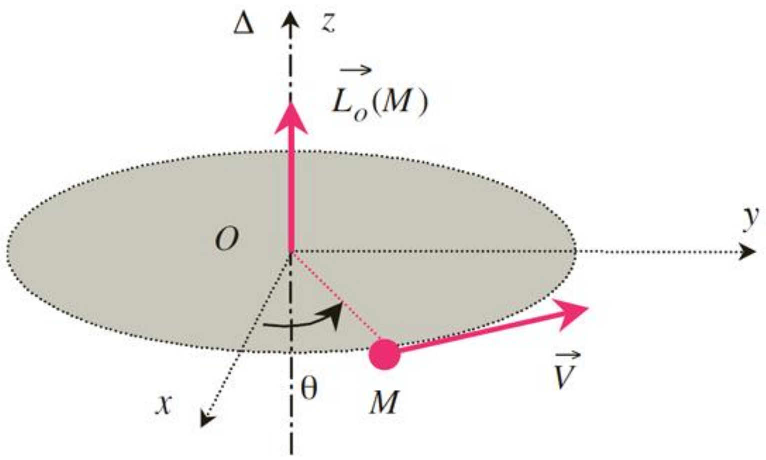
$$\frac{d\overrightarrow{L_{O/R}}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/R}}\right)}{dt} = \overrightarrow{v_{M/R}} \wedge m\overrightarrow{v_{M/R}} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(m\overrightarrow{v_{M/R}})}{dt}$$

إذا كان المعلم $\mathcal{R}$ عطاليا ($\mathcal{R}_g$) :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{O/R_g}}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a_{M/R_g}} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{F} = \sum \overrightarrow{M_{F/O}}$$

نظرية الدفع الزاوي: في معلم عطالي، مشتق الدفع الزاوي لجسيم(نقطة مادية) بالنسبة لنقطة ساكنة هو مجموع عزوم القوى المؤثرة على هذا الجسيم.

$$\frac{d\overrightarrow{L_{O/R_g}}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{F/O}}$$



- **خصائصه:**

- $\vec{L}_{/o} = Cst \Rightarrow \forall t . \overrightarrow{OM} // \sum \vec{F}$
- لما $\vec{L}_{/o}$ يكون ثابتا $\Leftarrow$ الحركة تكون مستوية .
- لما $\vec{L}_{/0} = \vec{0}$ $\Leftarrow$ الحركة تكون مستقيمة $\Leftarrow$ $\overrightarrow{OM} // \vec{V}$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{cste} \Rightarrow \left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right]_{R_g} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{F} \,//\, \overrightarrow{OM} \end{cases} \Rightarrow$$

إذا كان الدفع الزاوي لجملة ميكانيكية ثابتا (طولا واتجاها) تكون هذه الجملة إما معزولة (أوشبه معزولة)أو تخضع لقوة مركزية أي موجهة نحو النقطة O (المركز):

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\vec{e}_r$$

<u>**قوانين**</u> <u>KEPLER</u> : من بين القوى المركزية قوة التجاذب الكوني بين الشمس والكواكب وقد توصل العالم Kepler إلى ثلاثة قوانين تخص حركات الكواكب حول الشمس (باستعمال القياسات):

- <u>**القانون الأول**</u>: مسار كل كوكب قطع ناقص تقع الشمس عند أحد محرقيه.
- <u>**القانون الثاني**</u>: يغطي شعاع موضع كل كوكب مساحات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.
- <u>**القانون الثالث**</u>: يتناسب مربع كل كوكب مع مكعب بعده عن الشمس (نصف المحور الكبير للقطع الناقص).

$$T^2/a^3=cste$$

حيث T الدور الزمني للكوكب و a نصف المحور الكبير للقطع الناقص.

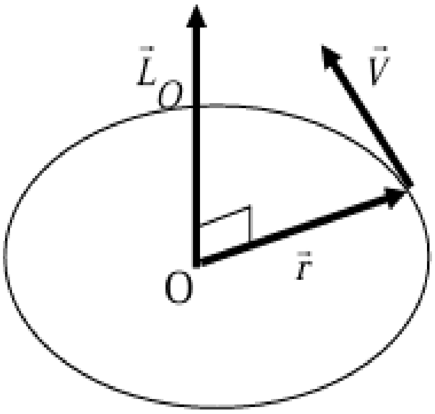
باستعمال خصائص القوى المركزية يمكن الحصول على هذه القوانين (ماعدا شكل المسار) فنكتفي بأهم خصائصه.

1- المسار:

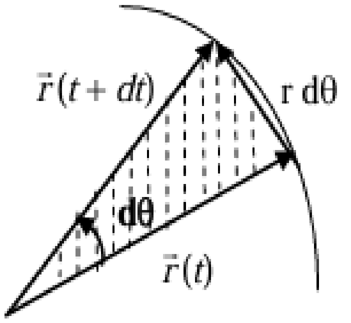
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V} = cste \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{L} \perp \vec{r} \\ \vec{L} \perp m\vec{V} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{L} \perp \left[\vec{r}, \vec{V}\right]$$

حيث $\left[\vec{r},\vec{V}\right]$ مستوي الحركة.

أي تقع الحركة في المستوي العمودي على $\vec{L}$ و الذي يحتوي على المركز(O).



2- سرعة تغطية المسار:

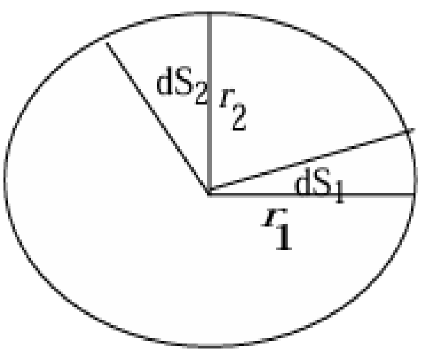


بما أن الحركة مستوية، نستعمل الإحداثيات القطبية (r,θ) لدراستها.

$$dS=\frac{1}{2}r(rd\theta)=\frac{1}{2}r^2d\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\omega$$

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge m\vec{V}=\vec{r}\wedge m(\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)=\vec{r}\wedge mr\omega\,\vec{e}_\theta=mr^2\omega(\vec{e}_r\wedge\vec{e}_\theta)=mr^2\omega\vec{e}_Z$$

$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}\Rightarrow\left|\vec{L}\right|=mr^2\omega=cste \quad\Rightarrow\quad \frac{ds}{dt}=\frac{r^2\omega}{2}=\frac{L}{2m}=cste$$



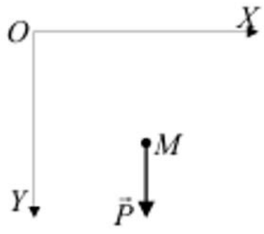
$$dS_1=dS_2 \quad\Rightarrow r_1{}^2\omega_1=r_2{}^2\omega_2$$

$$r_1\rangle r_2\Rightarrow\omega_2\rangle\omega_1$$

تزداد السرعة باقتراب المتحرك من المركز.

مثال

تهتز نقطة مادية M كتلتها m حول محور أفقي OZ عمودي على المستوى الشاقولي (OX,OY) للحركة (الشكل المقابل). موضعها محدد في كل لحظة بإحداثياتها الديكارتية.



أحسب مباشرة:

1/ عزم الثقل $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة $x, g,$ و m،

2/ العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O ثم بالنسبة للمحور OZ بدلالة $m, x, y, \dot{x}$ و $\dot{y}$.

3/ جد معادلة الحركة بتطبيق نظرية العزم الحركي على النقطة M.

الإجابة:

1/ نحسب عزم القوى المطبقة على النقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}_O=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right)\\ \vec{P}=\underbrace{\vec{P}_x}_{0}+\vec{P}_y=mg.\vec{j}\end{array}\right|\Rightarrow\vec{\tau}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ 0 & mg & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{\tau}_O=mgx.\vec{k}}$$

أما بالنسبة للمحور $\Delta=OZ$:

$$\tau_\Delta=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}\right).\vec{k}\ ;\ \boxed{\tau_\Delta=mgx}$$

2/ نحسب العزم الحركي للنقطة M بالنسبة للنقطة O في القاعدة $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\\ \vec{p}=m\vec{v}_x+m\vec{v}_y\end{array}\right|\Rightarrow\vec{L}_O=\begin{vmatrix}\vec{i} & -\vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ \dot{x} & \dot{y} & 0\end{vmatrix}\ ;\ \boxed{\vec{L}_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)\vec{k}}$$

أما بالنسبة للمحور $\Delta=OZ$:

$$L_\Delta=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}\right).\vec{k}\ ;\ \boxed{L_O=m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)}$$

نطبق نظرية العزم الحركي:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{\tau}_0\ ;\ m\left(\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-\dot{x}\dot{y}-y\ddot{x}\right)\vec{k}=mgx.\vec{k}\Rightarrow\boxed{x\ddot{y}-y\ddot{x}=gx}$$

تطبيق. 1: النواس البسيط:

يتكون النواس البسط من جسم صغير M (نعتبره نقطة مادية) كتلته m كثافته جد عالية، معلق بطرف خيط طوله l مهمل الكتلة وغير قابل للامتطاط وقد ثبت الطرف الآخر للخيط بنقطة ثابته O (أبعاد الجسم جد صغيرة أما طول الخيط).

والمطلوب هو:

1-تحديد وضع توازن الجملة.

2-نزيح النواس عن وضع توازنه ثم نحرره بدون سرعة ابتدائية، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك نظرية العزم الحركي.

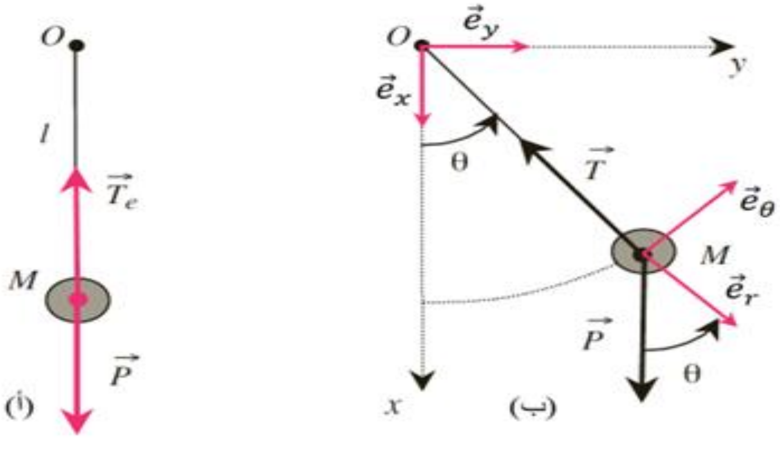
الحل:

الجملة المعتبرة هي النقطة المادية M ذات الكتلة m.

المرجع هو المرجع الأرضي الغاليلي أين تكون النقطة O ثابتة.

إحصاء جميع القوى المؤثرة على M:

-الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$ (قوة بعدية) وقوة تلامسيه وهي قوة توتر الخيط $\vec{T}$، الشكل (10.4) نهمل جميع قوى الاحتكاك.



الشكل ( ): القوى المؤثرة على M (أ) وضع التوازن (ب) وضع حركة (كيفي).

بتطبيق المبدأ الأساسي للتحريك على الجملة نجد:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ تسارع الجملة.

- وضع توازن الجملة الشكل (10.4) (أ) : $\vec{a} = \vec{0}$ ومنه :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{T} = -\vec{P} = -m\vec{g}$$

توتر الخيط معاكس مباشرة لقوة الثقل، ومنه فالخيط يأخذ الوضع الشاقولي عند التوازن.

- في حالة الحركة الشكل (10.4) (ب):العلاقة (31.4) التي تمثل المبدأ الأساسي للتحريك هي علاقة شعاعية ،نختار جملة لنسقط عليها هذه المعادلة. مسار الجسم هو عبارة عن جزء من دائرة مركزها O ونصف قطرها $(l=r)$. الاحداثيات القطبية هي الأنسب في هذه الحالة، حيث الأساس هو $(\vec{e}_r \,, \vec{e}_\theta)$. شعاع التسارع في هذا الأساس يكتب كالتالي (32.2):

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

بماأن (r=ثابت) فان شعاع التسار ع يكتب:

$$\vec{a} = \left(-l\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(l\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

ومنه نكتب:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta)$$

بإسقاط كل من الثقل وتوتر الخيط على الأساس $(\vec{e}_r \,, \vec{e}_\theta)$.

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mgcos\theta\vec{e}_r - mgsin\theta\vec{e}_\theta$$

ومنه نحصل على معادلتين:

$$(32.4) \quad mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

$$(33.4) \qquad -mgsin\theta = ml\ddot{\theta}$$

المعادلة الأخيرة يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية غير خطية بسبب وجود الحد (sin)، ليس من السهل حل المعادلة بهذا الشكل، الا في ظل شروط معينة حيث يمكن تقريب المعادلة بمعادلة خطية.

يتم استيفاء هذا الشرط في الحالة التي تكون فيها الزاوية (θ) صغيرة بالحد الذي يكون عندها بإمكاننا تقريب جيب الزاوية الى الزاوية، في هذه الحالة تصبح المعادلة التفاضلية بالشكل:

$$(34.4) \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة. نضع: $w^2 = g / l$ ونكتب عندها:

$$(35.4) \qquad \ddot{\theta} + w^2\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة تقبل حلا من الشكل:

$$\theta = \theta_m \sin(wt + \varphi)$$

يهتز الجسم على جانبي وضع التوازن بحركة جيبيه دورانية بسعة زاوية عظمى (θ_m)، وهي مقدار الازاحة الابتدائية. دور النواس البسيط الذي يقوم باهتزازات حرة غير متخامدة وذات سعة صغيرة يعطى بالعلاقة:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية السابقة مباشرة من خلال نظرية العزم الحركي بالنسبة لـ O:

عزم توتر الخيط $\vec{T}$ بالنسبة لـ O هو: $\vec{M}_0(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l\vec{e}_r \wedge (-T\vec{e}_r) = \vec{0}$

في حين أن عزم قوة الثقل بالنسبة لـ O:

$$\vec{M}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge (mgcos\theta\vec{e}_r - mgsin\theta\vec{e}_\theta) = -mglsin\theta(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

نلاحظ ان العزم الحركي للجسم بالنسبة لـ O يعطي بالعبارة:

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e}_r \wedge \left(ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = ml^2\dot{\theta}(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

نستنتج من ذلك ان:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

نحصل أخيرا بتطبيق نظرية العزم الحركي على ما يلي:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = \sum \vec{M}_0(\vec{F}) = -mglsin\theta\vec{e}_z$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

وبنفس الخطوات السابقة نحصل على المعادلة النهائية:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

يمكن الحصول على عبارة توتر الخيط بدلالة الزاوية (θ) من العلاقة (32.4) وهي كالتالي:

$$T = m(gcos\theta - l\dot{\theta}^2)$$