

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Institut de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Fiabilité et maintenance

Niveau : Master 02

Modélisation Mathématiques et Techniques de décision.

Enseignant : Z. BOUDEBANE

Email : z.boudebane@centre-univ-mila.dz

Année universitaire : 2025 - 2026

Chapitre

1

Rappel mathématique et les méthodes de fiabilité

1.1 Concepts généraux de la fiabilité

Définition 1.1.1 – Définition selon la NF X06-501

La définition de la fiabilité adoptée par la Norme AFNOR (Association française de normalisation XNF 06-501) est la suivante :

”la caractéristique d’un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans les conditions d’utilisation données et pour une période de temps déterminée.”

Exemple 1.1.1:

La fiabilité d’un roulement de broche pendant 20000 heures de fonction à $1500tr/min$ est égale à 0.9 signifie :

- Qu’il ya 90 chance sur 100 $\rightarrow$ probabilité,
- Pour que le roulement fonctionne sans signe d’usure $\rightarrow$ fonction requise,
- Pendant 20000 heures $\rightarrow$ temps donnée,
- À une fréquence de rotation moyenne de $1500tr/min \rightarrow$ conditions données.

1.1.1 Objectifs de la fiabilité

La notion de fiabilité s’applique à des systèmes réparable telsque les équipements industriels ou domestiques et aussi à des systèmes non réparables (lamps, composants donc jetables) pour objectif de :

- Mesurer une garantie dans le temps,
- Dévaluer rigoureusement de degré de confiance,

-
- Chiffrer une durée de vie,
 - Dévaluer une précision du temps de bon fonctionnement.

1.1.2 Caractérisation de la fiabilité

La fiabilité peut se caractériser de diverses manières par les fonctions de fiabilité et défaillance...

Fonction de fiabilité

En terme mathématique la fiabilité est représentée par une fonction qui appelée fonction de fiabilité $R(t)$ ou fonction de survie, qui est la probabilité de non défaillance sur la durée $[0, t]$.

La fonction de fiabilité R définie pour tout $t \geq 0$ par

$$R(t) = P(T > t),$$

où T une variable aléatoire positive mesurant le temps de défaillance où le temps jusqu'à la défaillance.

T peut être continue ou discrète, mais dans la plupart des applications, on suppose que T est une variable aléatoire continue.

Oa évidemment

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La fonction de fiabilité $R(t)$ (figure 1.1) possède plusieurs propriétés énoncées dans la proposition suivante

Proposition 1.1.1. *Soit $R(t)$ une fonction de fiabilité alors*

1. $R(t) \in [0, 1]$,
2. $R(0) = 1, R(\infty) = 0, (F(0) = 0, F(\infty) = 1),$
3. $R(t)$ est une fonction monotone décroissante.

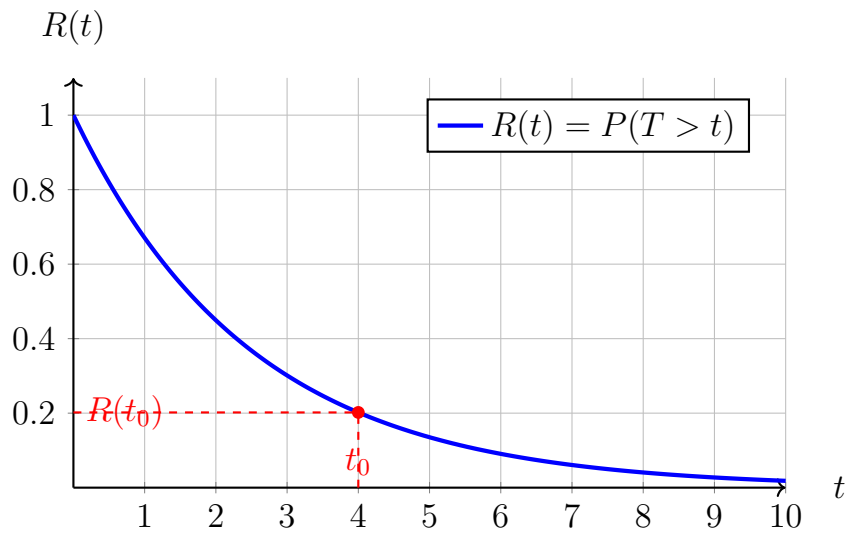


FIGURE 1.1 – Fonction de fiabilité $R(t)$.

Fonction de défaillance

La caractéristique contraire de la fiabilité appelée défaillance où défaillance, elle est donnée par

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - R(T),$$

la fonction $F(t)$ est une fonction de défaillance (fonction de répartition) représente la probabilité d'un défaillance avant l'instant t , elle est aussi appelée fonction cumulée de défaillance.

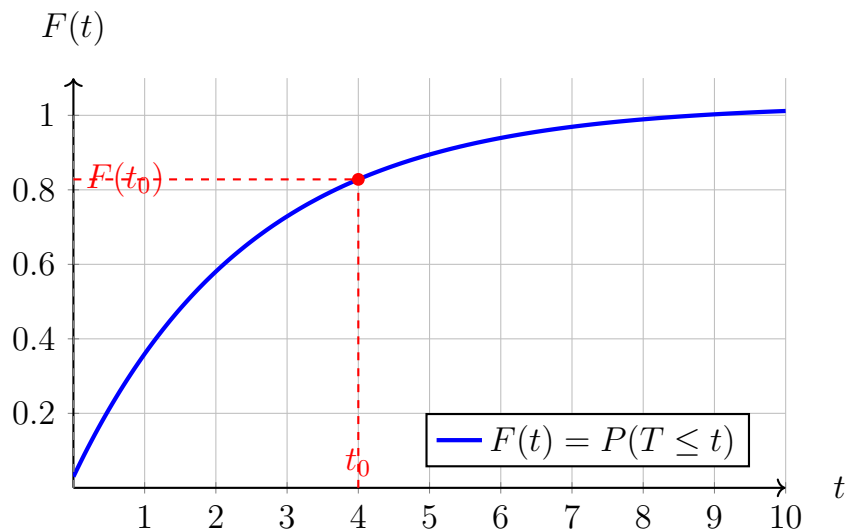


FIGURE 1.2 – Fonction de défaillance $F(t)$.

La dérivée de la fonction F par rapport au temps permet de définir la fonction de

probabilité de défaillance $f(t)$ (densité de défaillance) donnée par

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Les deux fonctions soit de fiabilité ou de défaillance peuvent être exprimées en fonction de $f(t)$ comme suit

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u) du.$$
$$F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

La probabilité qu'un système tombe en panne entre deux instants t_1 et t_2 équivaut à la surface sous la courbe de la fonction de densité de probabilité entre ces deux instants

$$P(t_1 < t < t_2) = F(t_1) - F(t_2) = R(t_1) - R(t_2).$$

1.2 Indicateurs de la fiabilité

Les principaux indicateurs de fiabilité sont les suivants :

1.2.1 Taux de défaillance instantané

Le taux de défaillance ou taux de panne instantané $\lambda(t)$ est un indicateur de fiabilité qui représente une fréquence d'occurrence instantanée de défaillance pour un intervalle de temps très court.

mathématiquement le taux de défaillance $\lambda(t)$ défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \right) \\ &= \frac{1}{R(t)} \left(-\frac{dR(t)}{dt} \right) \\ &= -\frac{d \ln R(t)}{dt} \\ &= \frac{f(t)}{R(t)}\end{aligned}$$

Physiquement $\lambda(t)$ c'est la probabilité conditionnelle d'avoir une défaillance d'un dispositif dans l'intervalle de temps $[t, \Delta t]$ sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant t . On peut également estimer λ selon la formule

$$\lambda = \frac{\text{nombre de défaillances}}{\text{temps cumulé de fonctionnement}}.$$

Proposition 1.2.1. *La fiabilité d'un dispositif de taux de défaillance λ est :*

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}.$$

1.2.2 Temps moyen de bon fonctionnement

Le temps moyen de bon fonctionnement notée $MTBF$ (en anglais mean time of failure) désigne le temps moyen entre deux défaillances, peut être exprimé comme espérance de la durée de vie

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

On peut également l'exprimer par une expression physique

$$MTBF = \frac{\text{somme des temps de fonctionnement entre les (n) défaillances}}{\text{nombre de défaillance (n)}}.$$

Si λ est constant, $MTBF = \frac{1}{\lambda}$.

Remarque 1.2.1. *Durée total de bon fonctionnement = la durée total en service – la durée de défaillances.*

Exemple 1.2.1:

Un compresseur industriel a fonctionné pendant 8000 heures en service continu avec 5 pannes dont les durées respectives sont : 7, 22, 8.5, 3.5, et 9 heures.

Déterminer son $MTBF$.

Solution :

$$MTBF = \frac{8000 - (7 + 22 + 8.5 + 3.5 + 9)}{5} = 1590 \text{ heures.}$$

Remarque 1.2.2. 1. On utilise par fois le symbole $MTTF$ pour la quantité $MTBF$, si la composante est jetable.

2. La fiabilité d'un dispositif est bonne si sa MTBF est élevée et son taux de défaillance λ est faible.

1.3 Relation entre les fonctions $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$, et, $\lambda(t)$

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les principales relations entre les fonctions $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$, et, $\lambda(t)$

Fonctions	$R(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	—	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(t)dt$	$e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$
$F(t)$	$1 - R(t)$	—	$\int_0^t f(t)dt$	$1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$
$f(t)$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	—	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$
$\lambda(t)$	$-\frac{d \ln R(t)}{dt}$	$-\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t)dt}$	—

TABLE 1.1 – Relations fondamentales entre les fonctions de fiabilité.

1.4 Le modèle exponentiel

Un des modèles plus utilisés en fiabilité est le modèle exponentiel, il décrit la durée des matériels, on trouve notamment pour les composants électroniques et électriques.

L principal avantage de ce modèle est que les probabilités de bon fonctionnement et de défaillance prennent une forme mathématique facile.

Dans le cas d'une loi de type exponentielle le taux de défaillance λ est constant, ceci signifie que les défaillances sont aléatoires et indépendantes du temps.

Définition 1.4.1 –

On dit qu'un variable aléatoire continue T a une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si sa fonction de densité de probabilité $f_T(t)$ est donnée par :

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

le modèle exponentielle est caractérisée par

Fonction de fiabilité : Pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_t^{\infty} f(u) du \\ &= \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Fonction de défaillance :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Taux de défaillance instantanée :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \text{constant}.$$

Temps moyen de bon fonctionnement MTBF :

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

On peut facilement détermine la durée de vie associée à un seuil de fiabilité :

$$R(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln R(t) = -\lambda t \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R(t)}$$

Exemple 1.4.1. *Un composant a une MTBF de 2000 heures, a quelle date ce composant aura une fiabilité de 90% ?*

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R(t)} = MTBF \cdot \ln \frac{1}{R(t)} = 2000 \cdot \ln \frac{1}{0.9} = 211 \text{ heures}.$$

1.4.1 Propriété de sans mémoire de loi exponentielle

Proposition 1.4.1. *Soit T une variable aléatoire suit une loi exponentielle alors la propriété de sans mémoire exprimée mathématiquement de façon suivante :*

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Cette proprité peut être écrite par l'utilisation de faibilité conditionnelle comme :

$$R(s|t) = P(T > t + s | T > t) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} = \frac{R(t + s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = R(s).$$

Ce resultat montre que un article neuf et un article d'occasion (encore fonctionnel) auront donc la même probabilité de survivre à un intervalle de temps de durée t , un article d'occasion est donc stochastiquement comme neuf.

1.5 Représentation graphique de la loi exponentielle.

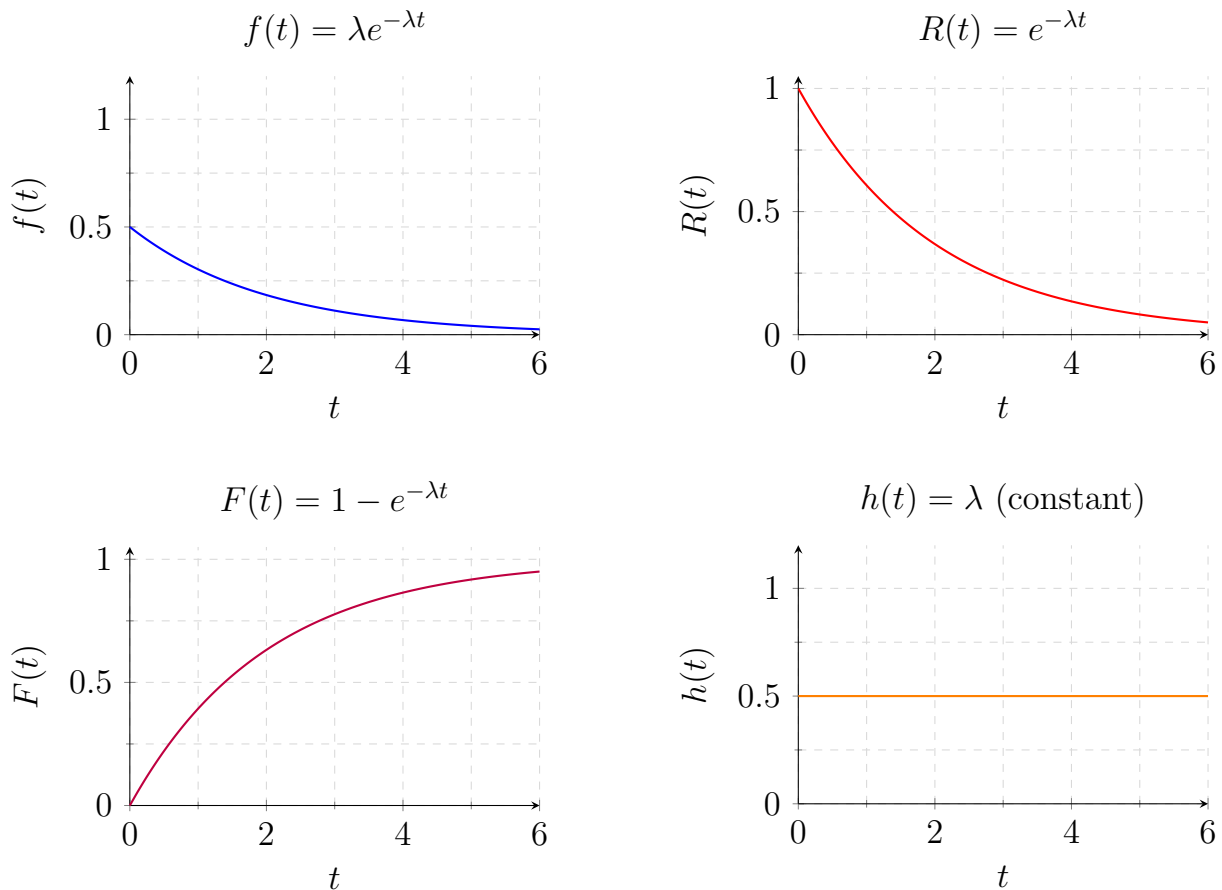


FIGURE 1.3 – Fonctions de la loi exponentielle : densité, fiabilité, défaillance et taux de défaillance pour $\lambda = 0.5$

1.6 Estimation de taux de défaillance

On considère un composant dont la fiabilité suit une loi exponentielle :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

où $\lambda > 0$ est le taux de défaillance. La fonction fiabilité décroît exponentiellement (graphique de gauche).

Pour estimer λ graphiquement, on prend le logarithme :

$$\ln(R(t)) = -\lambda t$$

Cela correspond à une droite de pente $-\lambda$ (graphique de droite). Ainsi, graphiquement :

$$\lambda = -\text{pente de la droite}$$

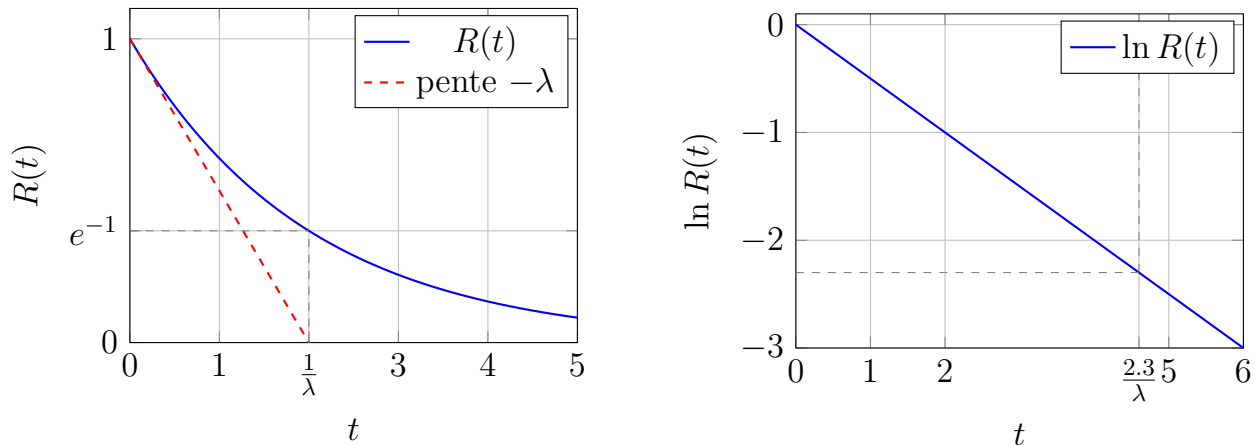


FIGURE 1.4 – Estimation graphique de λ : $R(t)$ et $\ln R(t)$

Exemple 1.6.1:

On considère les machines d'un atelier toutes identiques et toutes mises en service au même moment. soit T la v.a qui à chaque machine de l'atelier associe son temps de bon fonctionnement, en heures. T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.001$.

1. Ecrire
 - a) $f(t)$ la densité de probabilité de T .
 - b) $F(t)$ la fonction de défaillance d'une machine.
 - c) $R(t)$ la fonction de fiabilité d'une machine.
2. Calculer la probabilité pour qu'une machine prise au hasard dans l'atelier.
 - a) Ait un temps de bon fonctionnement de 900h exactement.
 - b) Devienne défaillante 1100 heures après la mise en service.
 - c) N'ait pas d'avarie au cours des 1500 premières heures d'utilisation .
 - d) Tombe en panne au bout d'un temps d'utilisation de 500 h minimum.

Solution

1) **Les fonctions associées à T**

Puisque $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ avec $\lambda = 0.001$ alors :

a) **La densité de probabilité de T est :**

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = 0.001 e^{-0.001t}, \quad t \geq 0$$

b) **La fonction de défaillance :**

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0.001t}$$

c) **La fonction de fiabilité :**

$$R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t} = e^{-0.001t}$$

2) **Les probabilités pour qu'une machine**

a) **Avoir un temps de bon fonctionnement exactement égale à 900h :**

puisque T est continue :

$$P(T = 900) = 0$$

b) **Être défaillante après 1100h :**

$$\begin{aligned} P(T \leq 1100) &= F(1100) = 1 - e^{-0.001 \times 1100} \\ &= 1 - e^{-1.1} \approx 1 - 0.3329 = 0.6671 \end{aligned}$$

c) **Ne pas tomber en panne au cours des 1500h :**

$$\begin{aligned} P(T > 1500) &= R(1500) = e^{-0.001 \cdot 1500} = e^{-1.5} \\ &\approx 0.2231 \end{aligned}$$

d) **Tomber en panne au bout d'au moins 500h :**

$$\begin{aligned} P(T \geq 500) &= R(500) = e^{-0.001 \cdot 500} = e^{-0.5} \\ &\approx 0.6065 \end{aligned}$$

1.7 La méthode d'ishikawa

La méthode d'ishikawa a été créée par le professeur Kaoru Ishikawa dans les années 60. C'est une méthode basée sur le diagramme d'Ishikawa qui est un outil permettant d'identifier les causes possibles d'un problème ou d'un effet (défaut). Pour cela, il est également connu sous le nom de diagramme de Causes/effets et aussi appelé diagramme en arête de poisson.

Le diagramme Ishikawa (figure 01) a une représentation graphique en forme de poisson, où la tête de poisson représente le problème à résoudre et les arêtes principales (les branches) les causes possibles d'un problème sont classées selon "5M" (abréviation de Main d'œuvre, Matériel, Matière, Méthode, Milieu).

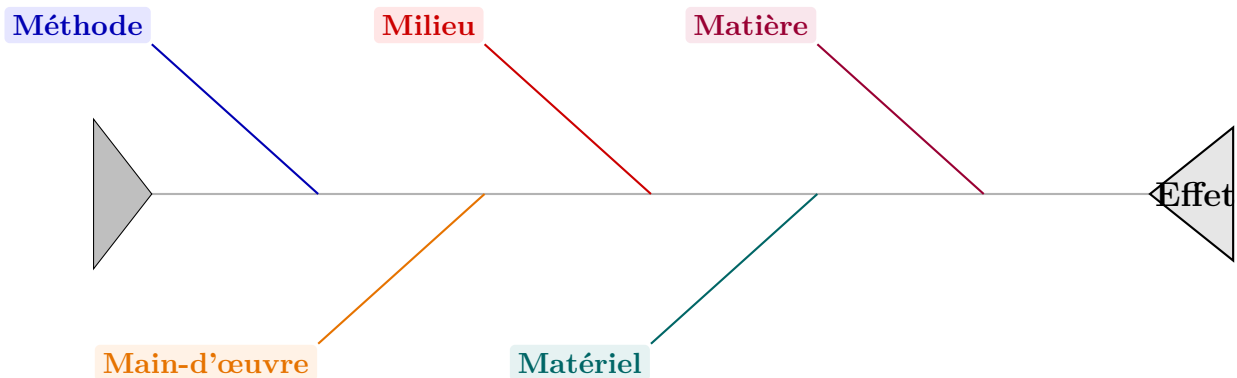


FIGURE 1.5 – Diagramme d'Ishikawa — Méthode des 5M

Les 5M sont présentés clairement dans le tableau suivant :

5M	Exemples
Méthode	Procédures, Mode opératoires, manuels, instructions.
Main-d'œuvre	Directe, indirecte, motivation, formation, expérience.
Milieu	Environnement, physique, éclairage, bruit, climat, marché.
Matériel	Machines, outils, équipements, capacité, âge, nombre maintenance.
Matière	Pièces, ensembles, Matières premières .

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif des 5M

Le diagramme d'ishikawa est utilisé également pour les études concernant la maintenance, la fiabilité, et la sécurité.